Musterlösung der Aufgabe H-31

Satz 1 *Sei M eine endliche Punktmenge in der Ebene und P, Q zwei Punkte die innerhalb M den größten Abstand haben. Dann sind P und Q Eckpunkte der konvexen Hülle $\mathsf{CH}(M)$ von M.*

Zum Beweis des Satzes setzen wir die folgenden Lemmata voraus:

Lemma 1 *Sei M eine endliche Punktmenge. Dann ist die konvexe Hülle $\mathsf{CH}(M)$ ein n-Eck.*

Lemma 2 *Sei M eine endliche Punktmenge und P eine Ecke der konvexe Hülle $\mathsf{CH}(M)$. Dann ist $P \in M$.*

Lemma 3 *Sei P ein innerer Punkt der Strecke $\overline{AB}$ und Q ein beliebiger Punkt. Dann ist entweder A oder B weiter von Q entfernt als P.*

Beweis des Satzes. Die konvexe Hülle $\mathsf{CH}(M)$ einer endlichen Punktmenge M ist ein n-Eck. Deswegen ist folgende Fallunterscheidung über die Lage von P vollständig.

Fall P liegt ausserhalb der konvexen Hülle. Dies ist unmöglich, da $P \in M \subseteq \mathsf{CH}(M)$.

Fall P ist Ecke der konvexen Hülle. Dann gilt die Behauptung.

Fall P ist innerer Punkt einer Kante $\overline{AB}$ der konvexen Hülle. Dann sind nach Lemma 2 $A, B \in P$, und nach Lemma 3 ist einer der Eckpunkte A oder B weiter von Q entfernt als P. Widerspruch!

Fall P ist innerer Punkt der konvexen Hülle. Dann schneidet der Strahl $[QP$ den Rand der konvexen Hülle in P', wobei $\mathsf{d}(Q, P') > \mathsf{d}(Q, P)$. Ist P' eine Ecke, so ist nach Lemma 2 $P' \in M$, Widerspruch. Ansonsten ist P' ein innerer Punkt einer Kante $\overline{AB}$, wobei o.B.d.A. $\mathsf{d}(Q, A) > \mathsf{d}(Q, P')$. Das ist wegen $A \in M$ ein Widerspruch zur Maximalität von $\mathsf{d}(Q, P)$. $\square$