

## Übungen zur Vorlesung Effiziente Algorithmen

### Blatt 1

**Aufgabe P-1:** Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- $f(n) + g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n)))$
- Wenn  $f(n) = O(g(n))$  ist, so auch  $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$ .
- $f(n) = \Theta(f(\frac{n}{2}))$

**Aufgabe P-2:** Zeigen Sie, dass die folgenden Äquivalenzen gelten:

$$\begin{array}{lll} f(n) = O(g(n)) & \text{gdw.} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \\ f(n) = o(g(n)) & \text{gdw.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \end{array}$$

**Aufgabe P-3:** Beschreiben Sie einen Algorithmus zur binären Suche in einem sortierten Array in Pseudocode, und führen Sie eine detaillierte Analyse von dessen Laufzeit mit Hilfe der *Master*-Methode durch.

**Aufgabe P-4:** Für welche der folgenden Rekursionsgleichungen kann das asymptotische Wachstum der Lösung  $T(n)$  mit Hilfe der *Master*-Methode bestimmt werden? Geben Sie in den Fällen, wo dies möglich ist, möglichst scharfe asymptotische Schranken an.

- $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + 4n^3 + 2n^2$
- $T(n) = 9T(\frac{n}{8}) + n \log n$
- $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n^2 \log n$
- $T(n) = 3T(\frac{3n}{5}) + n^2$

## Hausaufgaben:

**Aufgabe H-1:** Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

- $(f(n) + g(n))^2 = O(f(n)^2) + O(g(n)^2)$
- $f(n) = O(f(n + 1))$ .

(4 Punkte)

**Aufgabe H-2:** Führen Sie eine detaillierte Analyse der Laufzeit, wie in der Vorlesung am Beispiel INSERTION-SORT vorgeführt, für die *merge*-Routine, die beim Sortieren durch Mischen (MERGE-SORT) verwendet wird, durch.

(4 Punkte)

**Aufgabe H-3:** Bestimmen Sie das asymptotische Wachstum der Lösungen  $T(n)$  der folgenden Rekursionsgleichungen mit der *Master*-Methode, wo dies möglich ist:

- $T(n) = 3T\left(\frac{3n}{4}\right) + (n^2 + 3n)^2$
- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + \sqrt{n \log n}$
- $T(n) = 7T\left(\frac{3n}{8}\right) + 2n^2 + 3n$
- $T(n) = 32T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2\sqrt{n} + n$

(8 Punkte)

**Aufgabe H-4:** Entwerfen Sie einen Algorithmus für das folgende Problem: für eine Menge  $M$  von reellen Zahlen und eine weitere reelle Zahl  $r$  ist zu entscheiden, ob sich  $r$  als Summe  $r = s + t$  zweier Elemente  $s, t \in M$  schreiben lässt. Ihr Algorithmus sollte Laufzeit  $\Theta(n \log n)$  haben, zeigen Sie dies.

(4 Punkte)

**Abgabe der Hausaufgaben:** Freitag, 3. 5. 2002, 10<sup>15</sup> Uhr.