

Übungen zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen

Blatt 6

Aufgabe P-15: Für eine Folge von Operationen auf einer Datenstruktur gelte, dass die Kosten c_i der i -ten Operation

$$c_i = \begin{cases} i & \text{falls } i = 2^k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind. Berechnen Sie eine einfache Formel für die *exakten* Gesamtkosten für eine Folge von n Operationen mit Hilfe der Aggregat-Methode.

Aufgabe P-16: Erinnern Sie sich an das Beispiel des k -Bit Binärzählers aus der Vorlesung, dessen Gesamtkosten für n -faches Inkrementieren $O(n)$ sind. Erweitern Sie diesen Zähler um eine entsprechende Operation `DECREMENT`, die Sie in Pseudocode beschreiben. Hierbei dürfen Sie annehmen, dass per Definition `DECREMENT(0k) = 1k` festgelegt ist, der Zähler also zyklisch arbeitet. Geben Sie mit Hilfe der Aggregatmethode möglichst gute asymptotische obere und untere Schranken an die Gesamtkosten für n Operationen im schlechtesten Fall (`DECREMENT` und `INCREMENT` gemischt).

Hinweis: Überlegen Sie sich eine geeignete Sequenz von n Operationen, die einen *möglichst* schlechten Fall realisiert, und vergleichen Sie deren Laufzeit mit einer geeigneten oberen Schranke für den schlechtesten Fall.

Aufgabe P-17: Es seien die Elemente $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$ gegeben.

- a) Führen Sie für jedes dieser Elemente die Operation `MAKE-SET` aus, gefolgt von nachstehender Folge von `UNION`-Operationen. Setzen Sie hierfür Vereinigung nach dem Rang und Pfadverkürzung ein. Dokumentieren Sie die Schritte geeignet, und zeichnen Sie den am Ende entstandenen Wald, inklusive der Ränge der einzelnen Elemente.

UNION(K,C)
UNION(F,D)
UNION(D,C)
UNION(C,G)
UNION(A,B)
UNION(E,H)
UNION(I,J)
UNION(J,A)
UNION(H,F)
UNION(H,B)
UNION(A,L)

- b) Berechnen Sie das Gesamtpotenzial des momentanen Waldes vor und nach jeder Pfadverkürzung gemäß der Potenzialfunktion aus der Vorlesung.

Aufgabe H-19: Zeigen Sie mit Hilfe der Bänker-Methode, dass man die Gesamtlaufzeit von n -fachem HEAP-INSERT auf $O(n \log n)$ und die Gesamtlaufzeit für eine unmittelbar daran anschließende Folge von m -fachem HEAP-EXTRACT-MAX auf $O(m)$ setzen kann.

Aufgabe H-20: Zeigen Sie, dass eine Folge von m MAKE-SET-, UNION- und FIND-SET-Operationen, von denen n MAKE-SET sind, für Wälder mit Rangfunktion bereits eine Laufzeit von $O(m \log n)$ hat, auch wenn keine weiteren Verbesserungen, wie z.B. Pfadkompression, eingesetzt werden. (4 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 25. Juni, 14.00 Uhr im dafür vorgesehenen Briefkasten in der Theresienstraße.