Institut für Informatik
der Universität München
Dipl. Inf. Andreas Abel

WS 2006/07

8. Dezember 2006

Übungen zur Vorlesung
Lambda-Kalkül

Blatt 4

Aufgabe P-12 (Wohlfundiert?): Die Relation $\prec$ auf $\mathbb{N}$ sei induktiv definiert durch:

$$\frac{}{2n-1 \prec 2n+1} \qquad \frac{}{3n \prec 2n}$$

Beweisen Sie oder widerlegen Sie die Aussage $\prec$ *ist wohlfundiert*.

Aufgabe P-13 (Fundiertheit des lexikographischen Produkts): Seien R_1, R_2 zwei (nicht-reflexive) wohlfundierte Relationen. Zeigen Sie mit noetherscher Induktion, dass das lexikographische Produkt R von R_1 und R_2 wohlfundiert ist. [Hinweis: $(a,b)\ R\ (a',b')$ gdw. $a\ R_1\ a'$ oder $a = a'$ und $b\ R_2\ b'$.]

Aufgabe P-14 (η-postponement and junk-terms): Betrachten Sie die Erweiterung des λ-Kalküls um drei Konstanten Pair, fst und snd und die zusätzlichen β-Axiome

$$\mathsf{fst}\,(\mathsf{Pair}\,r\,s) \longrightarrow_\beta r \qquad \mathsf{snd}\,(\mathsf{Pair}\,r\,s) \longrightarrow_\beta s.$$

Zeigen Sie, dass η-Aufschiebung nun nicht mehr gilt. [Hinweis: "Schuld" daran sind "sinnlose" Terme wie $\mathsf{fst}\,(\lambda xt)$. Finden Sie eine η-Reduktion, die einen neuen β-Redex erzeugt.]

Aufgabe H-13 (Wohlfundierung und Reflexivität, 2 Punkte): Zeigen Sie: Eine stark normalisierende Relation ist irreflexiv.

Aufgabe H-14 (Affiner λ-Kalkül ist s.n., 4 Punkte): Der *affine λ-Kalkül* ist der λ-Kalkül mit folgender Einschränkung: Für jedem Abstraktionsterm λxt darf die gebundene Variable x höchstens einmal in t vorkommen. Z.B. sind I und K Terme des affinen λ-Kalküls, jedoch nicht $\lambda x.\,x\,x$ oder die Church-Ziffer $\underline{2}$.

Zeigen Sie, dass die β-Reduktion im affinen λ-Kalkül stark normalisierend ist.

Aufgabe H-15 (Starke und schwache Normalisierung identisch in λI, 6 Punkte): Der λI-Kalkül ist folgende Einschränkung des λ-Kalküls: Für jedem Abstraktionsterm λxt gilt $x \in \mathsf{FV}(t)$. Leere Abstraktionen, wie sie z.B. im Term K vorkommen, sind im λI-Kalkül verboten. Der λI-Kalkül geht auf Church (1941) zurück, wurde aber durch die heutige Form des λ-Kalküls, der zur Unterscheidung auch λK-Kalkül genannt wird, verdrängt.

Zeigen Sie:

a) Sei $\longrightarrow$ eine kongruente Reduktionsrelation. Wenn $t[s/x] \in \mathsf{sn}_{\longleftarrow}$ und $x \in \mathsf{FV}(t)$, dann $s \in \mathsf{sn}_{\longleftarrow}$.

b) Im λI-Kalkül fallen starke und schwache Normalisierung zusammen. [Hinweis: Verwenden Sie die induktiven Charakterisierungen WN und SN.]

Aufgabe H-16 (η nicht aufschiebbar für surjektive Paare, 4 Punkte): Betrachten Sie die Erweiterung des λ-Kalküls um zwei Konstanten L und R, Paare $\langle r, s\rangle$ und die zusätzlichen Axiome

$$\langle r, s\rangle\,\mathsf{L} \longrightarrow_\beta r \qquad \langle r, s\rangle\,\mathsf{R} \longrightarrow_\beta s \qquad \langle t\,\mathsf{L},\ t\,\mathsf{R}\rangle \longrightarrow_\eta t$$

Zeigen Sie, dass nun die η-Reduktion nicht mehr aufschiebbar ist.

Aufgabe H-17 (SN für Paare, 4 Punkte + 6 Sonderpunkte): Betrachten Sie die Erweiterung des λ-Kalküls um Paare (P-14), mit dem zusätzlichen Axiomenschema $\mathsf{Pair}\,(\mathsf{fst}\,t)\,(\mathsf{snd}\,t) \longrightarrow_\eta t$.

Ein *Evaluationskontext* ist ein Term mit einem Loch $[\,]$ in schwacher Kopfposition, gegeben durch die Grammatik $E ::= [\,] \mid E\,s \mid \mathsf{fst}\,E \mid \mathsf{snd}\,E$. Die Einsetzung von r in das Loch von E bezeichnen wir mit $E[r]$. Beispiele für Evaluationskontexte sind $[\,]\,\vec{s}$ und $(\mathsf{fst}\,([\,]\,s))\,t$; keine Evaluationskontexte sind z.B. $\lambda x.\,[\,]$ und $r\,[\,]$.

Für den erweiterten Kalkül definieren wir SN wie folgt:

$$\frac{\vec{s} \in \mathsf{SN}}{x\,\vec{s} \in \mathsf{SN}} \qquad \frac{t \in \mathsf{SN}}{\lambda xt \in \mathsf{SN}} \qquad \frac{r, s \in \mathsf{SN}}{\mathsf{Pair}\,r\,s \in \mathsf{SN}} \qquad \frac{E[t[s/x]] \in \mathsf{SN} \qquad s \in \mathsf{SN}}{E[(\lambda xt)\,s] \in \mathsf{SN}}$$

$$\frac{E[r] \in \mathsf{SN} \qquad s \in \mathsf{SN}}{E[\mathsf{fst}\,(\mathsf{Pair}\,r\,s)] \in \mathsf{SN}} \qquad \frac{E[s] \in \mathsf{SN} \qquad r \in \mathsf{SN}}{E[\mathsf{snd}\,(\mathsf{Pair}\,r\,s)] \in \mathsf{SN}}$$

a) Finden Sie einen stark $\beta\eta$-normalisierenden Term t mit $t \notin \mathsf{SN}$. [Hinweis: Dies ist notwendigerweise ein "unsinniger" Term.] (2P)

b) Zeigen Sie: $\mathsf{SN} \subseteq \mathsf{sn}_{\beta\eta}$. (2P+6SP)

Abgabe wieder nächste Woche in der Vorlesung.