Institut für Informatik
der Universität München
Dr. Andreas Abel

WS 2008/09

19. November 2008

Übungen zur Vorlesung
Lambda-Kalkül

Blatt 3

Aufgabe P-10 (Konsistenz):

a) Zeigen Sie: $\mathsf{T} \neq_\beta \mathsf{F}$.

b) Wir schreiben $r \# s$, wenn die Gleichung $r =_\beta s$ die β-Theorie inkonsistent macht, d.h., wenn aus $r =_\beta s$ schon $t =_\beta t'$ für beliebige Terme t, t' folgt. Zeigen Sie: $\mathsf{T} \# \mathsf{F}$.

Aufgabe P-11 (Barendregt 11.5.6): Sei $\omega \equiv \lambda x.\, x\, x$, $\Omega \equiv \omega\, \omega$, $\omega' \equiv \lambda y.\, \omega y$ und $\Omega' \equiv \omega'\, \omega'$. Zeigen Sie, dass $\Omega' \longrightarrow_{\mathsf{s}} \Omega$, aber $\Omega' \not\longrightarrow_{\mathsf{l}}^{*} \Omega$.

Aufgabe P-12 (Call-By-Value Lambda-Kalkül): Ein *Wert* ist entweder eine Variable oder eine λ-Abstraktion. Im Folgenden steht v immer für einen Wert. Call-by-value-Ein-Schritt-Reduktion ist die kompatible Hülle des Axiomenschemas $(\lambda xt)\, v \longrightarrow_{\beta_\mathsf{v}} t[v/x]$. Die schwache Kopf-Reduktion ist induktiv definiert durch:

$$\frac{}{(\lambda xt)\, v \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} t[v/x]} \qquad \frac{r \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} r'}{r\, s \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} r'\, s} \qquad \frac{s \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} s'}{v\, s \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} v\, s'}$$

Zeigen Sie:

a) $\longrightarrow_{\mathsf{wh_v}}$ ist nicht substitutiv, d.h. $t \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} t'$ impliziert nicht $t[s/x] \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} t'[s/x]$ für alle s.

b) $\longrightarrow_{\mathsf{wh_v}}^{*}$ ist auch nicht substitutiv.

c) $\longrightarrow_{\mathsf{wh_v}}$ ist Wert-substitutiv, d.h. $t \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} t'$ impliziert $t[v/x] \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} t'[v/x]$ für alle Werte v.

d) Wenn $r \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}}^{*} v$ und $s \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}}^{*} s'$, dann $r\, s \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}}^{*} v\, s'$.

Aufgabe H-7 (Identität unbedingt ungleich Wahrheitswert): Zeigen Sie $\mathsf{I} \# \mathsf{F}$ und $\mathsf{I} \# \mathsf{T}$.

Aufgabe H-8 (Unterscheidung von divergierenden Termen): Sei $\omega_3 = \lambda x.\, x\, x\, x$. Zeigen Sie: $\Omega \neq_\beta \omega_3\, \omega_3$. Gilt auch $\Omega \# \omega_3\, \omega_3$?

Aufgabe H-9 ((Schwache) Kopf-Normalform): Gegeben sind die vier

Terme $t_1 \equiv \lambda x.\, \mathsf{Y}\,(\lambda f.\, f\, x)$, $t_2 \equiv \mathsf{Y}\,(\lambda f y.\, f)$, $t_3 \equiv \mathsf{Y}\,(\lambda f x.\, x\, f)$, $t_4 \equiv \mathsf{Y}\,\mathsf{succ} \equiv \mathsf{Y}\,(\lambda n f x.\, f\,(n\, f\, x)$. Beweisen oder widerlegen Sie für jedes t_i die Aussagen:

a) t_i hat eine schwache Kopf-Normalform.

b) t_i hat eine Kopf-Normalform.

Aufgabe H-10 (Plotkin 1975, Call-By-Value Standardisierung): Standardreduktion im Call-By-Value Lambda-Kalkül ist wie folgt induktiv definiert:

$$\frac{t \longrightarrow_{\mathsf{wh_v}} t' \qquad t' \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} t''}{t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} t''}$$

$$\frac{}{x \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} x} \qquad \frac{t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} t'}{\lambda x t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} \lambda x t'} \qquad \frac{r \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} r' \qquad s \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} s'}{r\, s \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} r'\, s'}$$

Klar ist: $\longrightarrow_{\mathsf{s_v}}$ ist reflexiv und $\longrightarrow_{\mathsf{s_v}} \subseteq \longrightarrow^*_{\beta_{\mathsf{v}}}$. Zeigen Sie:

a) Wenn $t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} t'$ und $v \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} v'$, dann $t[v/x] \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} t'[v'/x]$.

b) Wenn $t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} x$, dann $t \longrightarrow^*_{\mathsf{wh_v}} x$.

c) Wenn $t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} \lambda x r'$, dann $t \longrightarrow^*_{\mathsf{wh_v}} \lambda x r$ und $r \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} r'$.

d) Wenn $t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} t'$ und $t' \longrightarrow_{\beta_{\mathsf{v}}} t''$, dann $t \longrightarrow_{\mathsf{s_v}} t''$.

Also ist $\longrightarrow_{\mathsf{s_v}} = \longrightarrow^*_{\beta_{\mathsf{v}}}$

Orientieren Sie sich an den Beweisen der Vorlesung und benutzen Sie die obige Präsenzaufgabe.

Abgabe der bearbeiteten Übungen: Mittwoch, 1. Dezember 2008, zu Beginn der Vorlesung.