Institut für Informatik
der Universität München
Dr. Andreas Abel

WS 2008/09

3. Dezember 2008

Übungen zur Vorlesung
Lambda-Kalkül

Blatt 4

Aufgabe P-13 (Wohlfundiert?): Die Relation $\prec$ auf $\mathbb{N}$ sei induktiv definiert durch:

$$\frac{}{2n-1 \prec 2n+1} \qquad \frac{}{3n \prec 2n}$$

Beweisen Sie oder widerlegen Sie die Aussage $\prec$ *ist wohlfundiert*.

Aufgabe P-14 (Fundiertheit des lexikographischen Produkts): Seien R_1, R_2 zwei (nicht-reflexive) wohlfundierte Relationen. Zeigen Sie mit noetherscher Induktion, dass das lexikographische Produkt R von R_1 und R_2 wohlfundiert ist. [Hinweis: $(a,b)\ R\ (a',b')$ gdw. $a\ R_1\ a'$ oder $a = a'$ und $b\ R_2\ b'$.]

Aufgabe P-15 (η-postponement and junk-terms): Betrachten Sie die Erweiterung des λ-Kalküls um drei Konstanten Pair, fst und snd und die zusätzlichen β-Axiome

$$\mathsf{fst}\,(\mathsf{Pair}\,r\,s) \longrightarrow_\beta r \qquad \mathsf{snd}\,(\mathsf{Pair}\,r\,s) \longrightarrow_\beta s.$$

Zeigen Sie, dass η-Aufschiebung nun nicht mehr gilt. [Hinweis: "Schuld" daran sind "sinnlose" Terme wie $\mathsf{fst}\,(\lambda xt)$. Finden Sie eine η-Reduktion, die einen neuen β-Redex erzeugt.]

Aufgabe H-11 (Vollständige η-Normalisierung, 4 Punkte): Die Funktion $(\cdot)^\eta$ ist rekursiv definiert wie folgt:

$$\begin{array}{lcl} x^\eta & = & x \\ (r\,s)^\eta & = & r^\eta\, s^\eta \\ (\lambda xt)^\eta & = & \left\{ \begin{array}{ll} t' & \text{falls } t^\eta = t'\,x \text{ und } x \notin \mathsf{FV}(t') \\ \lambda x.\, t^\eta & \text{sonst} \end{array} \right. \end{array}$$

Machen Sie sich an einigen Beispielen klar, dass $(\cdot)^\eta$ alle η-Redexe entfernt. Beweisen Sie für alle t: $t \longrightarrow_\eta^* t^\eta \not\longrightarrow_\eta$.

Aufgabe H-12 (Wohlfundierung und Reflexivität, 2 Punkte): Zeigen Sie: Eine stark normalisierende Relation ist irreflexiv.

Aufgabe H-13 (Affiner λ-Kalkül ist s.n., 4 Punkte): Der *affine λ-Kalkül* ist der λ-Kalkül mit folgender Einschränkung: Für jedem Abstraktionsterm λxt

darf die gebundene Variable x höchstens einmal in t vorkommen. Z.B. sind I und K Terme des affinen λ-Kalküls, jedoch nicht $\lambda x.\, x\, x$ oder die Church-Ziffer $\underline{2}$.

Zeigen Sie, dass die β-Reduktion im affinen λ-Kalkül stark normalisierend ist.

Aufgabe H-14 (Starke und schwache Normalisierung identisch in λI, 6 Punkte): Der λI-Kalkül ist folgende Einschränkung des λ-Kalküls: Für jedem Abstraktionsterm λxt gilt $x \in \mathsf{FV}(t)$. Leere Abstraktionen, wie sie z.B. im Term K vorkommen, sind im λI-Kalkül verboten. Der λI-Kalkül geht auf Church (1941) zurück, wurde aber durch die heutige Form des λ-Kalküls, der zur Unterscheidung auch λK-Kalkül genannnt wird, verdrängt.

Zeigen Sie:

a) Sei $\longrightarrow$ eine kompatible Reduktionsrelation. Wenn $t[s/x] \in \mathsf{sn}_{\longleftarrow}$ und $x \in \mathsf{FV}(t)$, dann $s \in \mathsf{sn}_{\longleftarrow}$.

b) Im λI-Kalkül fallen starke und schwache Normalisierung zusammen. [Hinweis: Verwenden Sie die induktiven Charakterisierungen WN und SN.]

Aufgabe H-15 (η nicht aufschiebbar für surjektive Paare, 4 Punkte): Betrachten Sie die Erweiterung des λ-Kalküls um zwei Konstanten L und R, Paare $\langle r, s\rangle$ und die zusätzlichen Axiome

$$\langle r, s\rangle\, \mathsf{L} \longrightarrow_\beta r \qquad \langle r, s\rangle\, \mathsf{R} \longrightarrow_\beta s \qquad \langle t\, \mathsf{L},\ t\, \mathsf{R}\rangle \longrightarrow_\eta t$$

Zeigen Sie, dass nun die η-Reduktion nicht mehr aufschiebbar ist.

Abgabe wieder nächste Woche in der Vorlesung.