Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Martin Hofmann

WS 2012/13

22. Oktober 2012

Übungen zur Vorlesung Komplexitätstheorie

Blatt 1

Es gibt zwei Sorten von Aufgaben: P-Aufgaben sind Präsenzaufgaben und werden gemeinsam während der Übung gelöst. H-Aufgaben sind Hausaufgaben.

Aufgabe P-1: Konstruieren Sie eine deterministische 1-Band Turingmaschine, die folgendes leistet: Bei Eingabe eines Wortes $w \in \Sigma^*$ steht am Ende der Berechnung das Wort $\#w$ auf dem Band, also ein Symbol $\# \in \Sigma$ gefolgt von w.

Aufgabe P-2: Betrachten Sie eine NTM, deren Band in einer Konfiguration vollkommen leer ist, außer einer Bandzelle, in der sich das Symbol # befindet. Der Kopf befindet sich über einer leeren Bandzelle, und der Zustand ist q.

1. Geben Sie Übergänge an, die es der Maschine erlauben, mit dem Kopf über dem Symbol # in den Zustand p zu wechseln. Im Zustand q soll die Maschine also das Symbol # auf dem Band suchen, und bei Erfolg in Zustand p wechseln.
2. Wie würde die gleiche Aufgabe mit einer DTM zu lösen sein? Vergleichen Sie den Zeitbedarf in beiden Fällen.

Aufgabe P-3: Zeigen Sie, dass das folgende Problem in P ist:

Gegeben:	Zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$
Frage:	Sind m und n teilerfremd, d.h. ist $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$?

Aufgabe P-4: Diskutieren Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
Es gibt eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jede deterministische Turingmaschine T durch eine deterministische Turingmaschine T' mit höchstens n Zuständen, also $|Q| \leq n$, simuliert werden kann.

Aufgabe P-5: In der Vorlesung wurde gezeigt: falls $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ gilt, so gilt auch $\mathsf{E} = \mathsf{NE}$. Die Technik, die im Beweis benutzt wurde, bezeichnet man als Padding.

Benutzen Sie Padding um zu zeigen: gilt $\mathsf{E} = \mathsf{NE}$, dann folgt $\mathsf{EXP} = \mathsf{NEXP}$.

Hausaufgaben:

Aufgabe H-1: Konstruieren Sie eine deterministische 1-Band Turingmaschine T, derart dass bei Eingabe einer natürlichen Zahl $n > 0$ (binär codiert) am Ende der Berechnung $n - 1$ auf dem Band steht. Bestimmen Sie $\mathsf{TIME}_\mathsf{T}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe H-2: Es bezeichnen LIN und Q die Klassen der Entscheidungsprobleme, die von einer DTM in Zeit $O(n)$ bzw. in Zeit $O(n^2)$ gelöst werden können, und NLIN und NQ die entsprechenden nichtdeterministischen Klassen.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels padding:

- Ist $\mathsf{LIN} = \mathsf{NLIN}$, dann auch $\mathsf{Q} = \mathsf{NQ}$.
- Ist NLIN unter Komplementierung abgeschlossen, dann auch NQ.

Aufgabe H-3: In der Vorlesung wurde der Hierarchiesatz für deterministische Zeitkomplexität bewiesen. Der Zeithierarchiesatz besagt:

$$\mathsf{TIME}(f(n)) \subsetneq \mathsf{TIME}((n \cdot f(n))^2)$$

Durch Auswahl einer geeigneten Funktion f (nämlich $f(n) = 2^n$) wurde in der Vorlesung gezeigt, dass aus dem Zeithierarchiesatz die Trennung der Komplexitätsklassen P und EXP, also $\mathsf{P} \subsetneq \mathsf{EXP}$, folgt.

Beweisen Sie mit einem analogen Argument die Trennung der Klassen E und EXP, also $\mathsf{E} \subsetneq \mathsf{EXP}$

Abgabe: Montag, der 29. Oktober 2012 in der Vorlesung.