Institut für Informatik der Universität München
Prof. Martin Hofmann

WS 2012/13
29. Oktober 2012

Übungen zur Vorlesung Komplexitätstheorie

Blatt 2

Aufgabe P-6: Zeigen Sie, dass das aus der Vorlesung bekannte Problem 3-COLOR NP-vollständig ist, indem Sie 3-SAT darauf reduzieren.

Aufgabe P-7: Man zeige, dass „Not all equal 3-SAT“ (NAE-3-SAT) NP-vollständig ist. NAE-SAT ist wie SAT aus Klauseln aufgebaut, allerdings bedeutet hier jede Klausel, dass nicht alle Literale den gleichen Wert haben dürfen (im Vergleich dazu: SAT fordert, dass nicht alle Literale falsch sein dürfen).

Hilfestellung: Man fügt eine neue Variable α hinzu und ersetzt dann jede Klausel $l_1 \vee l_2 \vee l_3$ durch folgende drei Klauseln: $l_1 \vee l_2 \vee X, \neg X \vee l_3 \vee Y, \neg X \vee \neg Y \vee \alpha$ alpha Hier sind X, Y für jede übersetzte Klausel frisch zu wählen, während α immer dasselbe ist.

Aufgabe P-8: In der Vorlesung hatten wir den Satz, dass zu jeder aussagenlogischen Formel φ eine erfüllungsäquivalente Formel ψ von polynomieller Größe existiert. Fordert man Äquivalenz statt Erfüllungsäquivalent gilt dies nicht.

1. Finden Sie eine Klasse von Formeln, deren äquivalente Formeln in KNF exponentiell größer sind.
2. Finden Sie erfüllungsäquivalente Formeln zu Ihrer Klasse von Formeln, die nur polynomiell größer sind.

Aufgabe P-9: Das Komplement einer Sprache L wird mit $\overline{\mathsf{L}} = \{w \mid w \notin \mathsf{L}\}$ bezeichnet.

Die Klasse $\{\overline{\mathsf{L}} \mid \mathsf{L} \in \mathsf{NP}\}$ wird $\mathsf{co\text{-}NP}$ genannt. Es ist ein bislang offenes Problem, ob $\mathsf{NP} = \mathsf{co\text{-}NP}$.

Zeigen Sie, dass wenn es ein NP-vollständiges Problem gibt, das in der Klasse $\mathsf{co\text{-}NP}$ liegt dann gilt auch $\mathsf{NP} = \mathsf{co\text{-}NP}$.

Hausaufgaben:

Aufgabe H-4: Zeigen Sie, dass SAT bereits dann NP-vollständig ist, wenn es nur zwei Sorten von Klauseln gibt: Klauseln in denen keine Negation vorkommt und Klauseln in denen alle Variablen negiert sind.

Aufgabe H-5:

1. Zeigen Sie, dass NP unter Durchschnitt, Vereinigung und Konkatenation abgeschlossen ist, d.h. sind L und L' in NP, dann auch $\mathsf{L} \cap \mathsf{L}'$, $\mathsf{L} \cup \mathsf{L}'$ und $\mathsf{L}\mathsf{L}' = \{ww' \mid w \in \mathsf{L} \wedge w' \in \mathsf{L}'\}$.

2. Zeigen Sie, dass P auch unter Komplementbildung abgeschlossen ist, d.h. ist $\mathsf{L} \in \mathsf{P}$ dann auch $\overline{\mathsf{L}} = \{w \mid w \notin \mathsf{L}\}$.

Aufgabe H-6: In der Vorlesung wurde erwähnt, dass $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{EXP}$ ist.

1. Geben sie einen Beweis dazu an.

2. Lässt sich dieser Beweis auch für die Fragestellung $\mathsf{NP} \overset{?}{\subseteq} \mathsf{E}$ verwenden?

   Ergänzen Sie den Beweis oder begründen Sie warum das nicht funktioniert.

Abgabe: Montag, der 5. November 2012 in der Vorlesung oder bis 12:00 im Sekretariat bei Fr. Roden (Oettingenstraße L1.03).