Institut für Informatik der Universität München | WS 2012/13

Prof. Martin Hofmann | 12. November 2012

Übungen zur Vorlesung Komplexitätstheorie

Blatt 4

Aufgabe P-14: In der Vorlesung hatten wir unter Zuhilfenahme einer hypotetischen polynomiellen Funktion g einen polynomiellen Algorithmus für SAT angegeben

$\texttt{SatTest(}\varphi\texttt{)}$
$\texttt{if}$ φ enthält keine Variablen $\texttt{then return evaluate(}\varphi\texttt{)}$
$\texttt{if}$ $g(\varphi) \in L$ $\texttt{then return false}$
$X = \texttt{Variable aus}$ φ
$\varphi_0 = \varphi[X := \texttt{false}]$
$\varphi_1 = \varphi[X := \texttt{true}]$
$\texttt{if SatTest(}\varphi_0\texttt{) then return true}$
$\texttt{if SatTest(}\varphi_1\texttt{) then return true}$
$L := L \cup \{g(\varphi)\}$
$\texttt{return false}$

Bestimmen Sie eine möglichst genaue Grenze dafür an, wie oft `SatTest` aufgerufen wird, einschließlich der rekursiven Aufrufe, wenn das Programm mit einer Formel φ aufgerufen wird.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $2 \cdot (L_i - L_j) \cdot n + 1$, wobei L_k für die Anzahl der Einträge in L im k-ten Aufruf steht und n die Anzahl der Variablen in φ bezeichnet.

Aufgabe P-15: Für die Klasse DP gibt es mehrere mögliche Definitionen.

- $\mathsf{DP\text{-}1}$ ist die Menge der Sprachen L, für die es Sprachen $L' \in \mathsf{NP}$ und $L'' \in \mathsf{co\text{-}NP}$ gibt, so dass $L = L' \cap L''$
- $\mathsf{DP\text{-}2}$ enthält diejenigen Sprachen L für die es Sprachen $L^+_{1...n}, L^-_{1...m} \in \mathsf{NP}$ und eine Funktion $f \in \mathsf{FP}$ gibt, so dass

  $L = \{w \mid u := f(w) \wedge (\forall i.u \in L^+_i) \wedge (\forall j.u \notin L^-_j)\}$

1. Zeigen Sie, dass die Definitionen $\mathsf{DP\text{-}1}$ und $\mathsf{DP\text{-}2}$ äquivalent sind, also tatsächlich $\mathsf{DP\text{-}1} = \mathsf{DP\text{-}2}$.

2. Zeigen Sie, dass $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{DP}$, $\mathsf{co\text{-}NP} \subseteq \mathsf{DP}$ und $\mathsf{DP} \subseteq \mathsf{P}^{\mathsf{NP}}$

3. Eine KNF-SAT-Formel φ heißt minimal unerfüllbar, wenn φ unerfüllbar ist, aber jede echte Teilformel erfüllbar ist.

   Eine Formel wird Teilformel genannt, wenn jede ihrer Klauseln auch in der Originalformel vorkommt.

   Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem ob eine Formel minimal unerfüllbar ist, auch genannt MIN-SAT, DP-vollständing ist.

   Bemerkung: Wir hatten bislang Vollständigkeit nur für die Klasse NP. Auch für eine beliebige Komplexitätsklasse K gilt: Unter K-Vollständigkeit versteht man, dass eine Sprache in dieser Klasse liegt und es andererseits auch eines der schwersten Probleme dieser Klasse ist. Für die Klasse DP bedeutet eines der schwersten Probleme: Jedes Problem in DP ist durch eine Funktion in FP auf dieses Problem zurückführbar.

Hausaufgaben:

Aufgabe H-10: Zeigen Sie: Wenn es ein Orakel K gibt, so dass $\mathsf{P}^{\mathsf{K}} = \mathsf{NP}$, dann ist auch $\mathsf{NP} = \mathsf{co\text{-}NP}$

Aufgabe H-11:

1. Zeigen Sie, dass jede Sprache über einem unären Alphabet dünn ist.

2. Konstruieren sie eine NP-vollständige Sprache, die zwar nicht dünn ist, aber mehr als polynomiell unter der maximalen Dichte liegt, d.h. eine Sprache L, so dass für jedes Polynom p gilt $c_L \cdot p = O(c_{\Sigma^*}$

3. Zeigen Sie, dass SAT nicht dünn ist.

Aufgabe H-12: In der Vorlesung wurde eine Aufzählung von Turingmaschinen T_i mit folgenden Eigenschaften erwähnt

- Die Laufzeit der i-ten Turingmaschine bei Eingaben der Länge n ist höchstens $i + n^i$

- Für jede Sprache $L \in \mathsf{P}$ gibt es eine natürliche Zahl i, so dass $L = L(T_i)$

Finden Sie so eine Aufzählung von Turingmaschinen. Dabei ist es nicht notwendig diese exakt anzugeben, legen Sie nur die zentralen Ideen für diese Aufzählung dar.

Abgabe: Mittwoch, der 21. November 2012 in der Vorlesung oder bis 12:00 im Sekretariat bei Fr. Roden (Oettingenstraße L1.03).