Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Martin Hofmann

WS 2012/13
19. November 2012

Übungen zur Vorlesung Komplexitätstheorie

Blatt 5

Aufgabe P-16: Seien $g[k]$ und $h[k]$ für $k \in \mathbb{N}$ folgende Aussagen:

- $g[k]$: Falls $A \in \Sigma_k$, so existiert $B \in \Pi_{k-1}$ und ein Polynom p, sodass gilt $x \in A \iff \exists y.|y| \leq p(|x|) \wedge (x, y) \in B$
- $h[k]$: Falls $A \in \Pi_k$, so existiert $B \in \Sigma_{k-1}$ und ein Polynom p, sodass gilt $x \in A \iff \forall y.|y| \leq p(|x|) \to (x, y) \in B$

Beobachten Sie, dass der Satz aus der Vorlesung mit der Quantorenalternierung den $g[k]$ und $h[k]$ für alle k entspricht. In der Vorlesung wurden die Fälle $g[1]$ und $g[2]$ bewiesen.

Man begründe $g[k] \to h[k]$.

Man begründe $h[k-1] \to g[k]$ mit der Methode aus der Vorlesung.

Mittels Induktion kann damit der Satz aus der Vorlesung bewiesen werden.

Aufgabe P-17: Eine Integer Expression ist eine Beschreibung einer Menge von natürlichen Zahlen. Integer Expressions sind durch folgende Grammatik definiert, wobei n eine natürliche Zahl ist:

$$e ::= n \mid e \cup e \mid e + e$$

Durch eine Integer Expression wird induktiv eine Menge definiert

- $M(n) = \{n\}$
- $M(e_1 \cup e_2) = M(e_1) \cup M(e_2)$
- $M(e_1 + e_2) = \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in M(e_1) \wedge n_2 \in M(e_2)\}$

INTEGER EXPRESSION INEQUIVALENCE bezeichnet das Entscheidungsproblem $M(e_1) \overset{?}{\neq} M(e_2)$, für zwei gegebene Integer Expressions e_1, e_2.

Zeigen Sie, dass INTEGER EXPRESSION INEQUIVALENCE in der Klasse Σ_2^P liegt.

Hausaufgaben:

Aufgabe H-13: Zur Erinnerung: $\mathsf{PH} := \bigcup_i \Sigma_i$

Zeigen Sie:

- $\bigcup_i(\Sigma_i \cup \Pi_i \cup \Delta_i) = \bigcup_i \Sigma_i = \bigcup_i \Pi_i = \bigcup_i \Delta_i$
- $\forall k \in \mathbb{N}(\Sigma_k \subseteq \Pi_k \Rightarrow \mathsf{PH} = \Sigma_k)$

Aufgabe H-14: Zeigen Sie: Falls die polynomielle Hierarchie strikt ist (also $\forall k \in \mathbb{N}.\Sigma_k \neq \Sigma_{k+1}$), so gibt es kein PH-vollständiges Problem bezüglich polynomieller Reduktionen (also kein Problem $\mathsf{P} \in \mathsf{PH}$ derart, dass sich jedes Problem in PH sich durch eine Funktion $f \in \mathsf{FP}$ auf P zurückführen lässt).

Aufgabe H-15: Sei $k \in \mathbb{N}$ und $L \in \Sigma_k$. Zeigen Sie, dass auch $L^* \in \Sigma_k$.

Abgabe: Mittwoch, der 28. November 2012 in der Vorlesung oder bis 12:00 im Sekretariat bei Fr. Roden (Oettingenstraße L1.03).