Institut für Informatik
der Universität München

Prof. Martin Hofmann

WS 2012/13

16. Januar 2013

Übungen zur Vorlesung Komplexitätstheorie

Blatt 11

Aufgabe P-36: Wiederholung von Aufgabe P-35.

Zeigen Sie, dass das Problem für drei gegebene Matrizen A, B, C zu zeigen, ob gilt $AB = C$ im BPP-Sinne in $O(n^2)$ lösbar ist.

Hinweis: Für Matrizen U und V, sowie einen Vektor x gilt: Aus $U = V$ folgt $Ux = Vx$.

Aufgabe P-37: Zeigen Sie, dass für jeden Körper K und jedes $n, l \in \mathbb{N}$ eine lineare Funktion $f : V \to U$ (mit $V = K^n$, $U = K^l$) bereits durch ihre Funktionswerte $f(e_i)$ eindeutig festgelegt ist, wobei $(e_i)_{i=1...n}$ ein Basis von V ist.

Zeigen Sie, dass für jeden Körper K und jedes $n, m, l \in \mathbb{N}$ eine bilineare Funktion $f : V \times W \to U$ (mit $V = K^n$, $W = K^m$, $U = K^l$) bereits durch ihre Funktionswerte $f(e_i, d_j)$ eindeutig festgelegt ist, wobei $(e_i)_{i=1...n}$ ein Basis von V und $(d_j)_{j=1...m}$ ein Basis von W ist.

Aufgabe P-38: Zeigen Sie, dass im Körper $\mathbb{Z}_2$ jede bilineare Funktion $f : V \times W \to U$ (mit $V = \mathbb{Z}_2^n$, $W = \mathbb{Z}_2^m$, $U = \mathbb{Z}_2^l$), sofern sie nicht überall gleich 0 ist, an wenigstens 2^{nm-2} Stellen ungleich 0 ist.

Aufgabe P-39: Betrachten Sie folgende Formel

$$f = (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg z) \wedge (\neg w \vee z) \wedge (w \vee x)$$

Bestimmen Sie gemäß dem Beweis von $\mathsf{NP} \subseteq \mathrm{PCP}(\mathrm{poly}, 1)$ das Polynom $[\![f]\!]$. Bestimmen Sie für die erfüllende Belegung $\eta_1 = (\neg w, x, y, \neg z)$ und die nicht erfüllende Belegung $\eta_2 = (\neg w, x, \neg y, z)$ den Wert von $k(\vec{r})$ für die Zufallsvektoren $\vec{r}_1 = (1, 0, 1, 0, 1)$ und $\vec{r}_2 = (1, 1, 1, 0, 0)$.

Hausaufgaben:

Aufgabe H-27:

Zeigen Sie: Wenn $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$, so existiert kein Polynomialzeit-Algorithmus, der für jeden Graphen G eine Clique der Größe $\frac{k}{m}$ berechnet, wobei k die Größe der größten Clique in G bezeichnet und m eine beliebige, aber feste Zahl > 1 bezeichnet.

Hinweis: Die Konstanten bei PCP für die Wahrscheinlichkeit können durch Wiederholung auf $\epsilon, 1 - \epsilon$ für ein beliebiges $\epsilon > 0$ gebracht werden.

Aufgabe H-28: Zeigen Sie, dass im Beweis von $\mathsf{NP} \subseteq \mathrm{PCP}(\mathrm{poly}, 1)$ für eine Formel f mit einer nicht erfüllenden Belegung η und einen Zufallsvektor $\vec{r}$, die Wahrscheinlichkeit, dass $k(\vec{r}) = 0$ genau 50% beträgt.

Aufgabe H-29: Betrachten Sie folgende Formel

$$f = (w \vee x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (w \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg w \vee x \vee z) \wedge \\ (w \vee \neg x \vee \neg z) \wedge (\neg w \vee y \vee z)$$

Bestimmen Sie gemäß dem Beweis von $\mathsf{NP} \subseteq \mathrm{PCP}(\mathrm{poly}, 1)$ das Polynom $[\![f]\!]$. Bestimmen Sie für die erfüllende Belegung $\eta_1 = (\neg w, x, y, \neg z)$ und die nicht erfüllende Belegung $\eta_2 = (\neg w, x, \neg y, z)$ den Wert von $k(\vec{r})$ für die Zufallsvektoren $\vec{r}_1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0)$, $\vec{r}_2 = (1, 1, 1, 0, 0, 0)$ und $\vec{r}_3 = (1, 1, 0, 0, 1, 1)$.

Abgabe: Mittwoch, der 23. Januar 2013 in der Vorlesung oder bis 12:00 im Sekretariat bei Fr. Roden (Oettingenstraße L1.03).