

Adalbert-Stifter-Gymnasium Passau
Studienseminar September 2006/2008

**3. Prüfungslehrprobe des
StRef Hans Dietmar Jäger**

im Fach Mathematik
am 28.5.2008
von 11:20 Uhr bis 12:05 Uhr
in der Klasse 11b
des Adalbert-Stifter-Gymnasiums
Raum 326

Thema:
**Ein Optimierungsproblem als Anwendung der
Ableitungsregeln**

Prüfungskommission: OStD Gerhard Wagner
StD Manfred Donhauser
OStR Stefan Winter

13. Oktober 2008

1 Klassensituation

Zum 2. Schulhalbjahr habe ich die Klasse 11b am Adalbert-Stifter-Gymnasium übernommen. Die Klasse wurde geteilt¹, so dass sie nur aus 15 Schülerinnen und Schülern (SuS) besteht (4 Schülerinnen, 11 Schüler). Mathematik wurde in der Klasse im 1. Halbjahr nur dreistündig unterrichtet (ohne Additum); deshalb wurde bisher nur eine Schulaufgabe geschrieben. Im 2. Halbjahr wird Mathematik fünfstündig unterrichtet: Drei Stunden Analysis und zwei Stunden Additum (Komplexe Zahlen). Die Lerninhalte (Analysis / Additum) werden dabei in Blöcken unterrichtet.

Die Mitarbeit und Beteiligung ist alterstypisch verhalten, aber zufriedenstellen. Gerade die Leistungsstützen der Klasse hinterfragen den Stoff und haben oft weiterführende Gedanken, die ich in folgenden Stunden gerne aufnehme. Die vier Damen sind eher ruhigerer Natur, bis auf ein stehen sie den männlichen Leistungsträgern aber in nichts nach. Die eher weniger guten Schüler habe ich in der ersten Reihe versammelt; sie zeigen die große Heterogenität in der Klasse: Selbst ein Schüler mit derzeitigem Notenstand 5 hat sich für den Leistungskurs Mathematik entschieden.

Durch die Klassenteilung ist viel Platz im Klassenzimmer vorhanden; beim Raum 326 handelt es sich um das Klassenzimmer der 11b.

2 Einbettung des Themas in den Lehrplan

Behandelt wurden im ersten Halbjahr Grundlagen über reelle Funktionen, Polynomfunktionen, 1. und 2. Ableitung mit Kurvendiskussion. An die Kurvendiskussion zum Ende des 1. Halbjahres schlossen im 2. Halbjahr die weiterführenden Themengebiete Scharen, Termbestimmung und Extremwertaufgaben an. Allerdings konnten ausschließlich Polynomfunktionen betrachtet werden.

Im Fachlehrplan Mathematik des G9 heißt es zu dem Themengebiet *Kurvendiskussion; Extremwertprobleme*:

“Der nunmehr erreichte Kenntnisstand ermöglicht es den Schülern, den Verlauf eines Funktionsgraphen rasch zu ermitteln. Für die Suche nach Extrempunkten und nach Wendepunkten werden dabei notwendige bzw. hinreichende Kriterien entwickelt und eingesetzt. Insbesondere die Frage nach Maxima und Minima spielt in der Praxis bei funktionalen Zusammenhängen eine wichtige Rolle. Extremwertprobleme sollen daher mit den Schülern eingehend behandelt werden.” [1, Seite 1219f] (22.5.2008)

Und ein Blick in den Lehrplan der 12. Klasse des G8 zeigt unter dem Punkt *Anwendungen der Differential- und Integralrechnung*:

“Die Jugendlichen führen Flächenberechnungen durch und bearbeiten wiederum Extremwertaufgaben, wobei auch Bezüge zur Geometrie aufgezeigt werden. [...]

- Anwendungen, insbesondere bei Wachstums- und Zerfallsprozessen und bei Fragen der Optimierung (z. B. Einbeschreibungs- oder Abstandsprobleme)” [2, Seitenende] (22.5.2008)

Daran anschließend wird das Thema Stetigkeit und Grenzwert behandelt. In der Klasse ist kein Schülerbuch eingeführt.

¹Im folgenden werde ich von der Klasse sprechen, auch wenn ich meine Teilklassen meine.

3 Einbettung der Unterrichtsstunde in die laufende Unterrichtssequenz

Die Lehrprobenstunde bezieht sich auf den Inhalt der Analysis. Im Anschluss an die Behandlung von Extremwertaufgaben wurden unter dem Themenkomplex *Technik des Ableitens* Ableitungen der Grundfunktionen $(\frac{1}{x}, \sqrt{x}, \sin(x))$ behandelt. Die Ableitungen wurden jeweils über Sekantensteigung und den Grenzwertübergang zur Tangentensteigung hergeleitet. Nachfolgend wurden die Ableitungsregeln (Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel) eingeführt und z. T. auch bewiesen. Dieser Abschnitt wurde mit einer Übersicht über die Ableitungsregeln und die Ableitungen der Grundfunktionen sowie Übungen dazu vor den Pfingstferien abgeschlossen.

Am Ende der Unterrichtssequenz soll den Schülerinnen und Schülern der Nutzen der Ableitung beliebiger Funktionen und die Anwendung der gelernten Regeln in Anwendungsbeispielen verdeutlicht werden.

4 Methodisch-didaktische Vorüberlegungen

Bisher waren bei Extremwertaufgaben als Zielfunktionen nur Polynomfunktionen möglich. Ableitungen von anderen Funktionen waren nicht bekannt. So konnten als Anwendung der Technik des Ableitens in der Analysis – z. B. bei Kurvendiskussionen oder Extremwertaufgaben – nur sehr eingeschränkt Aufgaben mit Praxisbezug ausgewählt werden.

Nach dem Kennenlernen der Ableitungen weiterer Funktionen – allg. Potenz-, Wurzel- und trigonometrische Funktionen – und der Ableitungsregeln über die Summen- und Faktorregel hinaus (und deren Einübung) stehen jetzt weit mehr Aufgaben mit Anwendungsbezug zur Bearbeitung bereit.

Die letzten Stunden waren geprägt vom Nachrechnen der Ableitungen als Grenzwertübergang der Sekantensteigung zur Tangentensteigung und der Ableitungsregeln inkl. der Beweisideen sowie dem Anwenden des Gelernten. Da diese Phasen zwar – in Maßen – Spielraum in der Vermittlung der Lerninhalte bieten, habe ich die Stunden des Übens und Anwendens mit möglichst freien Arbeitsaufträgen versehen, um den SuS Platz für Eigenantrieb und -motivation zu geben. So habe ich ein nach Schwierigkeitsgrad gestaffeltes Arbeitsblatt zur wahlweisen Eigen- oder Gruppenarbeit bearbeiten lassen, welches auch besonders gekennzeichnete knifflige Aufgaben für Spezialisten enthielt. So konnte alle SuS selbst entscheiden, in welchem Tempo sie welche Aufgaben in welcher Reihenfolge und in welcher Sozialform² bearbeiten. Mir geben diese Stunden dann auch die Möglichkeit, mit einzelnen Schülern in's Gespräch zu kommen über Leistungsstand, Motivation und individuelle Probleme beim Lösen der Aufgaben.

Diese Form des Arbeitens will ich mit der vorliegenden Stunde weiterführen; erstmals ist eine Extremwertaufgabe zu lösen, die in einen Sachzusammenhang eingebettet ist und deren Zielfunktion kein Polynom ist; die SuS werden dazu in Gruppen eingeteilt, die unterschiedlich starke SuS zusammenbringen. Ich habe mich bewusst gegen eine leistungsmäßig homogene Gruppenzusammensetzung und Aufgaben mit differenzierter Schwierigkeit entschieden; denn so kann ein schwächerer Schüler zu der Lösung beitragen – und den Lösungsweg am Stück mitverfolgen – auch wenn er schwierige Teile des Lösungsweges alleine nicht zustande gebracht hätte (Motivation).

²Hier fasse ich die Eigenarbeit auch als Sozialform auf.

Stärkere Schüler übernehmen dabei die Rolle des Lehrers, indem sie eigene Ideen und Überlegungen im Kreis der Gruppe erläutern und zur Diskussion stellen (Teamfähigkeit, Lernen durch Lehren).

Die Gruppenarbeit ist im Gegensatz zum Wettbewerb nach Erkenntnissen der Pädagogik und Psychologie das vorteilhaftere Instrument für eine motivierende Arbeitshaltung [10, Seite 151ff, besonders Seite 154: Entscheidung für Gruppenarbeit] [8, Seite 72ff, besonders Seite 74: 1.3.4 Kooperation beim Lernen]; per se gibt es beim Wettbewerb immer (nur einen) Gewinner und (entsprechend viele) Verlierer. Bei der Gruppenarbeit steht weniger das Gegeneinander als vielmehr der Gedanke des Miteinander im Vordergrund: Im wissenschaftlichen Diskurs besteht Einigkeit, dass kooperatives Lernen auf die Lernleistung positive Effekte hat [3, Gruppenarbeit] (22.5.2008).

Um dieses Ziel zu erreichen, wurden Teilaspekte der zu lösenden Aufgabe nach den Ferien in der vorhergehenden Stunde wiederholt, geübt und als Hausaufgabe gestellt: Ableitungen aller Art, Ableitungsregeln, Vorgehen bei der Lösung einer Extremwertaufgabe und Aspekte der Kurvendiskussion (Extrema, Randwerte, Definitionsmenge).

Um über den Tellerrand des analytischen Problems hinauszusehen, kann als Puffer am Ende der Stunde folgende Überlegung angesprochen werden (vor allem wenn sie während der Arbeitsphase von einem der SoS erkannt wurde): Geometrisch betrachtet – also ohne die in der Aufgabenstellung geforderte Zielfunktion zu finden – lässt die Erweiterung des Problems auf einen Vollkreis und die daraus folgende Symmetrie des Problems den Schluss nahelegen, dass nur das regelmäßige Sechseck die Fläche maximiert. Um dies schlüssig zu begründen, benötigt man allerdings den folgenden Satz (der nicht trivial ist): “Unter allen n -Ecken, die ein und demselben Kreis einbeschrieben sind, hat das regelmäßige den größten Inhalt.” Sehr schön wird dieses Problem – welches im Grunde schon (in der Variante eines Rechtecks mit konstantem Umfang) als Satz 27 im VI. Buche Euklids formuliert wurde und in Platons Menon 100 Jahre vorher schon in der Variante eines einem Kreis einbeschriebenen beliebigen Dreiecks erörtert wurde – in [9, Seite 9-14] beschrieben und gelöst. Umgekehrt löst die gestellte Aufgabe das Problem für ein n -Eck mit $n=6$.

5 Lernziele

In dieser Stunde stehen als kognitive Lernziele nicht das Erlernen von *neuen* Inhalten im Vordergrund, sondern das Anwendung und Verknüpfen des *bisher* Gelernten mit Bekanntem; also die Fähigkeiten im Umgang mit Techniken der Mathematik.

Die überfachlichen Lernziele zielen auf Sozialkompetenzen wie Teamfähigkeit und Integrationsfähigkeit sowie die Methodenkompetenz des Präsentierens; diese sehe ich gerade in der Oberstufe als sehr wichtig an, da sie für das spätere Berufsleben einen immer größeren Stellenwert einnehmen.

Kognitives Lernziel I Kennen und Anwenden der Ableitungen sowie der entsprechenden Regeln: Reproduktion, abstraktes Wissen.

Kognitives Lernziel II Einbetten der Technik des Ableitens in den größeren Sachzusammenhang beim Lösen einer Extremwertaufgabe: Interpretieren, übertragen, untersuchen, kombinieren.

Überfachliches Lernziel I & II Teamfähigkeit & Präsentation.

6 Stundendisposition

Phase	Unter- richts- form*	Medien **	Beschreibung	Lernziele lt. Abschnitt 5 auf Seite 4	Material Anlagen
Einstieg Wiederholung Motivation	UG	TA OHP	Lösungen der letzten Hausaufgabe werden von SuS präsentiert (entweder mündlich oder als Tafelanschrieb). Sie können die verwendeten Regeln beschreiben und den Lösungsweg erläutern. Die Vorgehensweise zur Lösung eines Extremwertproblems kann beschrieben werden.	Kognitives Lernziel I	Hausaufgabenblatt Lösungsvorschlag 1
Erarbeitung	GA	AB FOL	Die SuS bearbeiten in Gruppenarbeit eine Extremwertaufgabe mit Anwendungsbezug; erstmals tauchen bei der Kurvendiskussion keine Polynome auf; Summen- und Produktregel müssen angewendet werden.	Kognitives Lernziel II Überfachliches Lernziel I	Aufgabenblatt, Präsentationsfolie
Ergebnis- sammlung Ergebnis- sicherung	PR DIS UG	OHP	Je nach Qualität und Zeit werden eine oder zwei Lösungen von je ein oder zwei SuS der Gruppe am OHP präsentiert und mit der Klasse diskutiert. Die SuS vergleichen die präsentierte mit ihren eigenen Lösungen und beurteilen sie. Die Folie wird – evtl. nach einer Überarbeitung – den SuS in der nächsten Stunde als Kopie ausgeteilt.	Lernzielkontrolle der kognitiven Lernziele Überfachliches Lernziel II	Lösungsvorschlag 2
Puffer	UG	OHP	Weniger Zeit: Feedback zur Präsentation Mehr Zeit: Lösung durch regelmäßiges Sechseck	Überfachliches Lernziel II	

Legende:

- * UG = Unterrichtsgespräch, GA = Gruppenarbeit, PR = Präsentation, DIS = Diskussion
- ** TA = Tafel, OHP = Overheadprojektor, AB = Aufgabenblatt, FOL = Folie

7 Ausblick

In der nächsten Stunde steht ein weiteres komplexes Extremwertproblem zu Lösung an (ähnlich [7, Seite 19/81f A17 d]) oder [6, Seite 182 19.]. Dann folgen Übungen speziell zur Kettenregel.

Danach schließt ein Block zu den komplexen Zahlen an; in der Analysis folgt die Stetigkeit.

8 Anhang

Es folgen in chronologischer Reihenfolge des Auftretens die Materialien und Anlagen:

- Sitzplan der Klasse 11b
- Hausaufgabenblatt
- Lösungsvorschlag 1 *Lösungsvorschlag zur Hausaufgabe*
- Aufgabenblatt
- Präsentationsfolie
- Lösungsvorschlag 2 *Lösungsvorschlag zur Aufgabe*
- Erklärung

Literatur

- [1] Fachlehrplan G9 Mathematik. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung. <http://www.isb.bayern.de/isb/download.asp?DownloadFileID=8f5923b1fc79324526de7441680baacc>.
- [2] Lehrplan (Pflicht-/Wahlpflichtfächer) - III Jahrgangsstufen-Lehrplan - Jahrgangsstufen 11/12 - Mathematik. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung. <http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1/g8.de/index.php?StoryID=26192&PHPSESSID=25b058721f12a14970227494dae893bf>.
- [3] Gruppenarbeit. e-teaching.org, 05 2007. <http://www.e-teaching.org/lehrszenarien/seminar/gruppenarbeit/>.
- [4] Greifenegger Krumbacher Baierlein, Barth. *Anschaliche Analysis 1*. Ehrenwirth, Franz Ehrenwirth Verlag GmbH & Co. KG, München, 1982. 6. unveränderte Auflage.
- [5] Krumbacher Barth. *Analysis anschaulich 1 Lösungen*. Oldenbourg, Schulbuchverlag GmbH, München, Düsseldorf, Stuttgart, 2000. 1. Auflage.
- [6] Krumbacher Barth. *Analysis anschaulich 1*. Oldenbourg, Schulbuchverlag GmbH München, 2003. 3., korrigierte Auflage.
- [7] Heinz Jörg Claus. *Extremwertaufgaben*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1992. ISBN 3-534-10910-4.
- [8] Akademie für Lehrerfortbildung, editor. *Psychologie für das Studienseminar - Ein Manual für die Schulpraxis am Gymnasium*, volume 117. Akademie für Lehrerfortbildung, Dillingen, 2004. 4. Auflage.
- [9] Otto Toeplitz Hans Rademacher. *Von Zahlen und Figuren*. Springer, Berlin, November 2000. 2. Auflage, Reprint.
- [10] Johanna Schlagbauer Rainer Glas. *Pädagogik am Gymnasium*. Brigg Verlag, 2007. 1. Auflage.