Praktikum Beweiser: Bereich Prädikatenlogik

Letz, SS 2004, Informatik, TU München

Aufgabe 13: (Interpretationen und Modelle) Wir betrachten die aus den folgenden 4 Formeln bestehende Formelmenge, wobei a, b, s Funktionszeichen sind und P ein Prädikatszeichen ist (die Stelligkeiten ergeben sich aus der Syntax der Formel):

1. $\forall x \, \exists y \; P(x, y)$
2. $\forall x \; P(x, s(x))$
3. $\forall x \; \neg \; P(x, x)$
4. $\exists x \; (\; P(s(a), x) \land P(s(x), b) \;)$

(a) Geben Sie ein Modell $\mathcal{I} = \langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ der Formelmenge an, d.h. eine Interpretation, die alle Formeln der Menge erfüllt, und beweisen Sie die Modelleigenschaft.

(b) Ein Modell $\mathcal{I} = \langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ heisst *minimal* für eine Formel(menge), wenn sein Universum $\mathcal{U}$ minimale Mächtigkeit hat. Geben Sie ein solches Modell an, beweisen Sie die Modelleigenschaft und zeigen Sie, dass es minimal ist.

Wichtige Bemerkung: Ein Universum darf nicht leer sein, muss also mindestens ein Element enthalten.