Praktikum Beweiser: Bereich Prädikatenlogik Letz, SS 2003, Informatik, TU München

# Musterlösungen der Aufgaben

## Bereich Aussagenlogik

### Lösung Aufgabe 1

Definition von $\neg F$ durch $\downarrow$: $(F \downarrow F)$

Definition von $F \vee G$ durch $\downarrow$: $((F \downarrow G) \downarrow (F \downarrow G))$

Definition von $F \wedge G$ durch $\downarrow$: $((F \downarrow F) \downarrow (G \downarrow G))$

### Lösung Aufgabe 2

(b) $\neg((p \wedge (q \rightarrow (r \vee s))) \rightarrow (p \vee q)) \equiv (p \wedge (q \rightarrow (r \vee s)) \wedge \neg(p \vee q)) \equiv (p \wedge (q \rightarrow (r \vee s)) \wedge \neg p \wedge \neg q)) \equiv (p \wedge \neg p \wedge (q \rightarrow (r \vee s)) \wedge \neg q)) \equiv \perp$

(c) $\{p, \neg q, (p \rightarrow q)\}$

### Lösung Aufgabe 3

- $(p \wedge ((p \rightarrow q) \rightarrow q)) \equiv (p \wedge (\neg(\neg p \vee q) \vee q)) \equiv (p \wedge ((p \wedge \neg q) \vee q)) \equiv$
  zur KNF: $(p \wedge (p \vee q) \wedge (\neg q \vee q))$
  zur DNF: $((p \wedge p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q))$

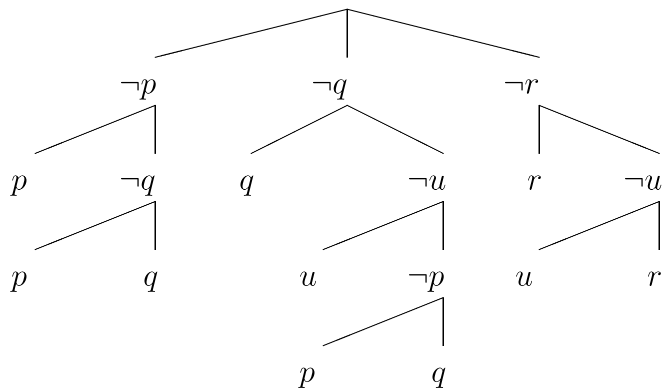
### Lösung Aufgabe 5

Tableaubeweis für $F = ((a \rightarrow (b \rightarrow c) \rightarrow ((a \wedge b) \rightarrow c))$

$$\begin{array}{ccc}
 & \neg F & \\
 & (a \rightarrow (b \rightarrow c)) & \\
 & \neg((a \wedge b) \rightarrow c) & \\
 & (a \wedge b) & \\
 & \neg c & \\
 & a & \\
 & b & \\
\neg a & | & (b \rightarrow c) \\
 & & \neg b \;|\; c
\end{array}$$

### Lösung Aufgabe 7

Gerschlossenes Konnektionstableau für $S$:




## Lösung Aufgabe 8

Lineare Resolutionswiderlegung von $S$:

$(2), \ldots, (9), (1), \neg q \vee \neg r,\ \neg u \vee \neg r,\ \neg p \vee \neg r,\ q \vee \neg r,\ \neg r,\ \neg u,\ r,\ \square$

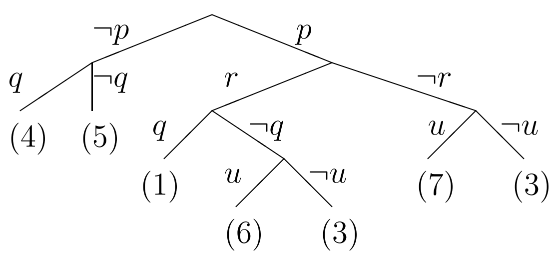
## Lösung Aufgabe 10

Die Eingabe-Resolution ist nicht vollständig. Gegenbeispiel:

$S = \{p \vee q, p \vee \neg q, \neg p \vee r, \neg p \vee \neg r\}$. Es gibt keine Eingabe-Resolutionswiderlegung für $S$.

## Lösung Aufgabe 12

Gerschlossener semantischer Baum für $S$:




Bereich Prädikatenlogik

## Lösung Aufgabe 1

1. Eingabe-Alphabet der Turingmaschine: $\{s_1, \ldots, s_n\}$ als Konstanten übernommen
2. Leerzeichen $e$ als Konstante übernommen

3. Zustände der Turingmaschine: $\{z_1, \ldots, z_n\}$ als Konstanten übernommen

4. Leeres Halbband: $\emptyset$ (Konstante) (Halbband muss u.U. dynamisch erweitert werden)

5. Einseitiges Halbband: $b(F, B)$ (2-stelliges Funktionszeichen: First, Restband)

6. Konfiguration: $C(L, R, K, Z)$ (4-stelliges Prädikatszeichen: Linkes Band, Rechtes Band, Kopfposition, Zustand)

7. Für jede Programmzeile (Transition): $z, s \mapsto z', s', b$ ($b$ Bewegung: $<$ (nach links), $>$ (nach rechts), $|$ (stehen bleiben) eine bzw. zwei Formeln:

   $|$: $\forall LR(C(L, R, s, z) \to C(L, R, s', z'))$

   $<$: $\forall FLR(C(b(F, L), R, s, z) \to C(L, b(s', R), F, z'))$ und
   $\forall FLR(C(\emptyset, R, s, z) \to C(\emptyset, b(s', R), e, z'))$

   $>$: $\forall FLR(C(L, b(F, R), s, z) \to C(b(s', L), R, F, z'))$ und
   $\forall FLR(C(L, \emptyset, s, z) \to C(b(s', L), \emptyset, e, z'))$

8. Und falls $z$ ein akzeptierender Zustand ist:

   $$C(\cdots) \to \bot$$

9. Falls Eingabewort $w = s_1 \cdots s_n$ und Anfangszustand $z$:

   $$C(\emptyset, b(s_2, b(\cdots b(s_n, \emptyset) \cdots)), s_1, z)$$

   (d.h. Kopf steht auf erster Position des rechten Halbbandes):

Es gilt: Turingmaschine akzeptiert Eingabe $s_1 \cdots s_n$ gdw entsprechende Formelmenge unerfüllbar.

## Lösung Aufgabe 2

Minimales Modell $\mathcal{I} = \langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ wie folgt:

- Universum $\mathcal{U} = \{0, 1\}$, Interpretationsfunktion $\iota$ wie folgt:
  - $\iota(a) = \iota(b) = 0$
  - $\iota(s) = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$ (hierbei ist eine Funktion als eine Menge geordneter Paare aufgefasst), alternative Definition: $\iota(s)(0) = 1$ und $\iota(s)(1) = 0$
  - $\iota(<) = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$

  Beweis der Minimalität von $\mathcal{U}$:

  - Wegen Formeln 1, 2 oder 4 darf $\iota(<)$ nicht leer sein (z.B. folgt aus 2: $\forall x < (x, s(x))$, dass jedes Modell $\iota$ das Prädikatszeichen $<$ als nicht leer interpretieren muss, denn $<(x, s(x))$ kann nur wahr werden, wenn die Relation $\iota(<)$ zumindest ein Tupel enthält).

- Andererseits kann es aber kein kleineres Modell geben, z.B. $\mathcal{U} = \{0\}$, da wegen Formel 3: $\forall x \neg < (x, x)$ zumindest ein Tupel aus $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ nicht in $\iota(<)$ sein darf. Wenn aber $\mathcal{U}$ nur ein Element, z.B. 0, enthält, dann enthält auch $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ nur ein Element. Zusammengafasst hätten wir dann: $\iota(<) \neq \emptyset$ und $\iota(<) \neq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$, und damit einen Widerspruch!

## Lösung Aufgabe 3

Skolemisierte Formeln:

1. $\forall x(P(x, f(x)) \wedge P(f(x), x))$
2. $\forall x(P(x, f(x))) \rightarrow P(y, x))$
3. $\forall xy(P(y, x) \wedge (P(x, f(x, y)) \rightarrow P(y, x)))$

## Lösung Aufgabe 4

1. $F\sigma = ((P(f(y), f(z)) \wedge P(f(z), z)) \rightarrow P(f(y), z))$
   $F\tau = ((P(x, f(x)) \wedge P(f(x), a)) \rightarrow P(x, a))$
   Trägermenge von $\sigma\tau = \{x/f(f(x)), y/f(a), z/a\}$
   Trägermenge von $\tau\sigma = \{x/f(y), y/f(f(y)), z/a\}$
   $F\sigma\tau = ((P(f(f(x)), f(a)) \wedge P(f(a), a)) \rightarrow P(f(f(x)), a))$
   $F\tau\sigma = ((P(f(y), f(f(y))) \wedge P(f(f(y)), a)) \rightarrow P(f(y), a))$
2. $F \models F\sigma\tau$ folgt aus Substitutionskorrektheit (Skript S. 14)

## Lösung Aufgabe 7

$\neg Q(x, y)$ $\quad$ $\neg Q(f(x), y)$ $\quad$ $R(y)$

$\neg P(x_2, y_2)$ $\quad$ $Q(y_2, f(x_2))$ $\quad$ $Q(f(y_1), y_1)$ $\quad$ $\neg R(f(a))$

$\sigma_3 = \{y_2/f(a), x_2/a\}$ Schritt 3

$\sigma_2 = \{y_1/f(a), x/f(a)\}$ Schritt 2

$\sigma_1 = \{y/f(a)\}$ Schritt 1

$P(x_3, f(x_3))$

$\sigma_4 = \{x_3/a\}$ Schritt 4

Die schlussendliche Substitution ist $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = \{y/f(a), y_1/f(a), x/f(a), y_2/f(a), x_2/a, x_3/a\}$

## Lösung Aufgabe 8

Modell $\langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ für die Formelmenge $S$:

$\mathcal{U} = \{0, 1\}$

$\iota(a) = 0$, $\iota(f) = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$

$\iota(R) = \{0\}$, $\iota(P) = \iota(Q) = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$

Beweis, dass $\langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ die Menge $S$ erfüllt:

$c_1$ : Für jede Variablenbelegung $\mathcal{A}$ gilt: $\langle \iota^{\mathcal{A}}(x), \iota^{\mathcal{A}}(y)\rangle \notin \iota(Q)$ oder $\langle \iota^{\mathcal{A}}(x), \iota^{\mathcal{A}}(f(y))\rangle \notin \iota(Q)$, damit muss immer eines der ersten beiden Literale in $c_1$ erfüllt sein.

$c_2$ : Für jede Variablenbelegung $\mathcal{A}$ gilt: $\langle \iota^{\mathcal{A}}(x), \iota^{\mathcal{A}}(y)\rangle \notin \iota(P)$ oder $\langle \iota^{\mathcal{A}}(y), \iota^{\mathcal{A}}(x)\rangle \in \iota(Q)$, damit ist immer eines der beiden Literale in $c_2$ erfüllt.

$c_3$ : Wenn $\mathcal{A}(x) = 0$, dann ist $\iota^{\mathcal{A}}(f(x)) = 1$ und die Klausel erfüllt, da $\langle 0, 1\rangle \in \iota(P)$; andernfalls, wenn $\mathcal{A}(x) = 1$, dann ist $\iota^{\mathcal{A}}(f(x)) = 0$ und die Klausel erfüllt, da $\langle 1, 0\rangle \in \iota(P)$.

$c_4$ : analog $c_3$.

$c_5$ : $\iota(f(a)) = 1$ und $1 \notin \iota(R)$, damit ist $c_5$ erfüllt.