Institut für Informatik
der Universität München
Dr. J. Johannsen

SS 2000

8. Mai 2000

Übungen zur Vorlesung
Entwurf und Analyse von Algorithmen

Blatt 1

Aufgabe 1: Geben Sie einen kombinatorischen Beweis dafür an, dass für die in der Vorlesung definierten Zahlen $s_{n,k}$ gilt

$$s_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} ,$$

indem Sie eine Bijektion $\phi : S_n \to S_n$ konstruieren mit

$$\forall \sigma \in S_n \ \ lrm(\sigma) = cyc(\phi(\sigma)) \ .$$

Aufgabe 2: Für $\sigma \in S_n$ sei $exc(\sigma) := \#\{ i \in [n] \,;\, \sigma(i) > i \}$, und es sei

$$e_{n,k} := \#\{ \sigma \in S_n \,;\, exc(\sigma) = k \} \ .$$

1. Geben Sie eine Rekursionsgleichung für die Zahlen $e_{n,k}$ an.
2. Ferner sei $asc(\sigma) := \#\{ i \in [n-1] \,;\, \sigma(i) < \sigma(i+1) \}$, und

   $$a_{n,k} := \#\{ \sigma \in S_n \,;\, asc(\sigma) = k \} \ .$$

   Zeigen Sie, dass für alle $1 \leq k \leq n$ gilt $a_{n,k} = e_{n,k}$.

Die Zahlen $e_{n,k}$ sind als EULERsche Zahlen bekannt und werden auch mit $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ bezeichnet.

Aufgabe 3: Es sei $I_n := \{ (x_1, \ldots, x_n) \,;\, 0 \leq x_i < i \leq n \}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $I : S_n \to I_n$ mit

$$I : \sigma \mapsto \big(I_1(\sigma), \ldots, I_n(\sigma)\big)$$

eine Bijektion ist, indem Sie Algorithmen konstruieren, die die Abbildung I und die Umkehrabbildung I^{-1} berechnen. Der Vektor $I(\sigma)$ heisst *Inversionsvektor* der Permutation σ.

Bemerkung: Ein Algorithmus für I^{-1} kann verwendet werden, um Permutationen in S_n gleichverteilt zufällig zu erzeugen.

Abgabetermin: Montag, 15. Mai, 14[15] Uhr.