Prof. Dr. Reinhold Letz
Dr. Ralph Matthes

Institut für Informatik
der Universität München

Übungsblatt 1

zur Vorlesung Lambda-Kalkül und Typen
im Sommer 2000
9. Mai 2000

1. Definiere $K := \lambda x \lambda y x$ und $S := \lambda x \lambda y \lambda z.xz(yz)$ (x, y, z verschieden). Beachte: Anwendungen sind immer implizit von links her geklammert, und der Punkt steht für ein Klammerpaar, das am Punkt öffnet und soweit rechts schließt, wie irgend (syntaktisch korrekt) möglich ist.

   Berechne eine β-Normalform von SKK, d.h. einen Term r, den man durch endlich viele Umformungen mittels $(\lambda xt)s \to t[x := s]$ (das sind β-Reduktionen) aus SKK erhält und der keine (weiteren) β-Reduktionen erlaubt.

2. Zeige

   (a) $\underline{m} \circ \underline{n} =_\beta \underline{m \cdot n}$ und

   (b) $\underline{m}\ \underline{n} =_\beta \underline{n^m}$ für $m \neq 0$.

   Dabei seien $\underline{n} := \lambda f \lambda x. \underbrace{f(\dots(f}_{n\text{-mal}}\, x)\dots)$ die n-te Church-Ziffer, die Komposition wie erwartet $r \circ s := \lambda x.r(sx)$ (für ein „neues“ x) und $m \cdot n$ und n^m die üblichen Operationen auf natürlichen Zahlen. Wir erkennen, daß auf diese Weise einfache Arithmetik im ungetypten Lambda-Kalkül modelliert werden kann (tatsächlich lassen sich alle partiell rekursiven Funktionen modellieren).

3. (schwere Aufgabe) Definiere einen Lambda-Term P, der den Vorgänger modelliert: Für jede natürliche Zahl n ist $P\underline{n} =_\beta \underline{n-1}$, und $P\underline{0} =_\beta \underline{0}$. Verifiziere, daß P diese Spezifikation erfüllt.

   Ein Weg: Die Ziffer $\underline{n}$ wendet ihr erstes Argument n-mal auf ihr zweites an. Also ist Iteration schon von selbst im System. Volle primitive Rekursion läßt sich mittels einer Paarbildung auf Iteration zurückführen. Paare selbst kann man ganz leicht definieren (also zu Termen r und s einen Term $\langle r, s\rangle$ und zu r Terme $\pi_1 r$ und $\pi_2 r$ mit $\pi_1\langle r, s\rangle =_\beta r$ und $\pi_2\langle r, s\rangle =_\beta s$).

Besprechung in der Übung am **15. Mai 2000**.