Prof. Dr. Reinhold Letz
Dr. Ralph Matthes

Institut für Informatik
der Universität München

# Übungsblatt 2

## zur Vorlesung Lambda-Kalkül und Typen im Sommer 2000

9. Mai 2000

In der Vorlesung wird die Konfluenz der $\beta$-Reduktion bewiesen. Wir benennen die Reduktionsrelation der Einfachheit halber mit $\to$ statt $\to_\beta$. $\to^*$ sei der transitive und reflexive Abschluß von $\to$. Dann besagt Konfluenz die Existenz eines Terms $t$ zu Termen $r$, $r'$ und $r''$ mit $r \to^* r'$ und $r \to^* r''$ so, daß $r' \to^* t$ und $r'' \to^* t$. In Zeichen:

$$\forall r \forall r' \forall r'' \Big( r \to^* r' \wedge r \to^* r'' \Rightarrow \exists t. r' \to^* t \wedge r'' \to^* t \Big).$$

In den folgenden Aufgaben darf die Konfluenz von $\to$ immer vorausgesetzt werden. Ziel ist es, den Nutzen der Konfluenzaussage zu erkennen.

1. Zeige, daß $\to$ die Church-Rosser-Eigenschaft hat, d.h., daß für alle Terme $r$ und $s$ aus $r =_\beta s$ folgt: $\exists t. r \to^* t \wedge s \to^* t$.

2. Zeige $\lambda x \lambda y x \neq_\beta \lambda x \lambda y y$. (Also sind die Projektionen auf das erste und auf das zweite von zwei Argumenten tatsächlich verschieden im Sinne unserer Beta-Gleichheit. Natürlich nehmen wir dabei implizit an, daß $x$ und $y$ verschiedene Variablen bezeichnen.)

3. In Fortsetzung von Aufgabe 2 auf Blatt 1 zeige für alle Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$
$$\underline{m}\ \underline{n} \to^* \underline{n^m},$$
falls $m \neq 0$.

4. Ein einfaches Lemma besagt: $\forall s \exists r. sr =_\beta r$. Die Beweisidee: Setze bei gegebenem Term $s$
$$r := (\lambda x. s(xx))(\lambda x. s(xx))$$
für eine in $s$ nicht frei vorkommende Variable $x$.

   Verifiziere, daß $sr =_\beta r$. (Also stellt $r$ einen Fixpunkt von $s$ dar, wenn $s$ als Funktion interpretiert wird.)

   In Aufgabe 3 auf Blatt 1 haben wir einen Nachfolger auf Church-Ziffern gebraucht, also einen Term $S$ mit $\forall n \in \mathbb{N}. S\underline{n} =_\beta \underline{n+1}$. Dafür eignet sich $S := \lambda z \lambda f \lambda x. f(zfx)$. (Verifiziere das.)

   Nach obigem Lemma gibt es einen Term $r$ mit $Sr =_\beta r$. Der Term $r$ im obigen Beweis ist keine Church-Ziffer, also nicht von der Form $\underline{n}$ mit einer natürlichen Zahl $n$. Zeige, (daß dies kein Zufall ist, sondern) daß es keine Church-Ziffer gibt, die Fixpunkt von $S$ ist.

Besprechung in der Übung am **22. Mai 2000**.