Prof. Dr. Reinhold Letz
Dr. Ralph Matthes

Institut für Informatik
der Universität München

Übungsblatt 3

zur Vorlesung Lambda-Kalkül und Typen im Sommer 2000

23. Mai 2000

1. Wir wollen schwache Normalisierung des einfach getypten Lambda-Kalküls auf eine besonders einfache Weise einsehen. Alle Terme seien also einfach getypt. Das bedeute, wir lassen die Typisierungsherleitungen implizit und verwenden gleich eine induktive Definition der einfach getypten Terme:

   - Ist x eine Variable und ρ ein Typ, so ist x^ρ ein Term vom Typ ρ.
   - Ist x eine Variable, ρ ein Typ und r ein Term vom Typ σ, so ist $\lambda x^\rho r$ ein Term vom Typ $\rho \to \sigma$.
   - Ist r ein Term vom Typ $\rho \to \sigma$ und s ein Term vom Typ ρ, so ist rs ein Term vom Typ σ.

   Die Tatsache, daß r ein Term vom Typ ρ ist, wird durch $r : \rho$ oder r^ρ ausgedrückt, also z. B. $\lambda f^{\rho\to\rho}\lambda x^\rho.f(f(fx)) : (\rho \to \rho) \to \rho \to \rho$. Dabei werden die Typen der gebundenen Variablen nicht extra angeschrieben, wenn nur eine Lesart möglich ist, was z. B. in $\lambda x^\rho \lambda x^\sigma.x$ nicht der Fall ist. (Man vermeide solche Terme in expliziten Darstellungen!)

   (a) Wir benutzen die Menge NF von Termen, induktiv definiert durch
      - $\vec{r} \subseteq \mathrm{NF} \Rightarrow x\vec{r} \in \mathrm{NF}$
      - $r \in \mathrm{NF} \Rightarrow \lambda xr \in \mathrm{NF}$

      Zeige, daß NF genau aus den β-normalen Termen besteht, d. h., aus den Termen r, zu denen es kein s gibt mit $r \to_\beta s$.

   (b) Definiere $\quad r\downarrow :\Leftrightarrow \exists t \in \mathrm{NF}.r \to_\beta^* t$.
      $r\downarrow$ bedeutet also, daß r eine Normalform hat.
      Zeige: Wenn $r \in \mathrm{NF}$ und $s^\rho \in \mathrm{NF}$, dann gilt (i) $rs\downarrow$, falls rs ein einfach getypter Term ist, und (ii) $r[x^\rho := s]\downarrow$.
      Tip: Der Beweis kann durch Hauptinduktion über ρ und Nebeninduktion über $r \in \mathrm{NF}$ geführt werden. Wer es etwas schwerer haben will, zeigt nur (ii) alleine und benutzt noch $r^{\rho\to\sigma} \in \mathrm{NF} \Rightarrow rx^\rho\downarrow$.

   (c) Zeige nun, daß für alle einfach getypten Terme r gilt $r\downarrow$.

2. Zeige, daß für eine stark normalisierende binäre Relation $\to$ aus der lokalen Konfluenz die Konfluenz folgt.

   Hinweis: Durch Induktion über die starke Normalisierbarkeit von r zeige, daß jedes von r ausgehende Konfluenzdiagramm zu schließen ist.

Besprechung in der Übung am **29. Mai 2000**.