Prof. Dr. Reinhold Letz
Dr. Ralph Matthes

Institut für Informatik
der Universität München

Übungsblatt 4

zur Vorlesung Lambda-Kalkül und Typen im Sommer 2000

30. Mai 2000

Wir beschäftigen uns auf diesem Blatt nur mit einfachen Typen!

1. Sei ρ ein beliebiger Typ. Zeige, daß die n-te Church-Ziffer

$$\underline{n} = \lambda f \lambda x.\, \underbrace{f(\ldots(f}_{n\text{-mal}}\, x)\ldots)$$

im leeren Kontext den Typ $(\rho \to \rho) \to \rho \to \rho$ erhält, i. Z.

$$\emptyset \vdash \underline{n} : (\rho \to \rho) \to \rho \to \rho.$$

Untersuche, welche Typen $\underline{m} \circ \underline{n} = \lambda x.\underline{m}(\underline{n}x)$ und $\underline{m}\ \underline{n}$ im leeren Kontext haben können, wenn $\underline{m}$ und $\underline{n}$ die m-te bzw. die n-te Church-Ziffer sind.

2. Zeige, daß jeder geschlossene (d. h. ohne freie Variablen) Term in NF (der induktiven Charakterisierung der Normalformen), der im leeren Kontext den Typ $(\iota \to \iota) \to \iota \to \iota$ (ι gemäß Vereinbarung ein Grundtyp) erhält, eine Church-Ziffer oder gleich $\lambda f f$ ist. (Was unterscheidet $\underline{1}$ von $\lambda f f$?)

3. Zeige, daß für typisierbare Terme in Normalform rekonstruierbar ist, welcher Typ ρ jeweils in der Anwendung der Abstraktionsregel benutzt wurde, d. h. in der Regel $\Gamma, x : \rho \vdash r : \sigma \Rightarrow \Gamma \vdash \lambda x r : \rho \to \sigma$. Zeige anhand eines Beispiels, daß dies nicht für beliebige Terme gilt.

4. (Nun noch eine Aufgabe ohne Typen:) Sei $\mathsf{sn}(k)$ die Menge der Terme, für die alle Beta-Reduktionsfolgen höchstens die Länge k haben. Wir zählen dabei so, daß $\mathsf{sn}(0)$ gerade die Menge der Normalformen ist. Zeige nun, daß $\mathsf{SN} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathsf{sn}(k)$. Dies soll konstruktiv geschehen. Natürlich mittels Induktion, aber wie folgt: Gib Funktionen f_n mit n Stellen für $n \in \mathbb{N}$ sowie eine einstellige Funktion g und eine zweistellige Funktion h an so, daß gilt:

   - Falls $r_i \in \mathsf{sn}(k_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$, so $x\vec{r} \in \mathsf{sn}(f_n(k_1, \ldots, k_n))$.
   - Falls $r \in \mathsf{sn}(k)$, so $\lambda x r \in \mathsf{sn}(g(k))$.
   - Falls $r[x := s]\vec{s} \in \mathsf{sn}(k)$ und $s \in \mathsf{sn}(\ell)$, so $(\lambda x r)s\vec{s} \in \mathsf{sn}(h(k, \ell))$.

   Dies ist der Weg, um die Induktion über sn durch Induktion über Zahlen zu ersetzen und so die Argumentation mittels unendlicher Reduktionsfolgen zu vermeiden.

Besprechung in der Übung am **5. Juni 2000**.