Prof. Dr. Reinhold Letz
Dr. Ralph Matthes

Institut für Informatik
der Universität München

Übungsblatt 5

zur Vorlesung Lambda-Kalkül und Typen im Sommer 2000

6. Juni 2000

Ziel dieses Blattes ist es, eine induktive Charakterisierung der Menge wn der schwach normalisierenden Terme zu bekommen, die analog[1] zu der der stark normalisierenden Terme mittels SN ist. Dazu dient die Serie der Aufgaben, die keineswegs in der Reihenfolge bearbeitet werden müssen. Man muß eben nur notfalls eine der noch nicht eingesehenen vorherigen Aussagen als „black box" einsetzen. Zunächst definieren wir induktiv die Menge WN:

- Falls $\vec{r} \subset \mathsf{WN}$, dann $x\vec{r} \in \mathsf{WN}$.
- Falls $r \in \mathsf{WN}$, dann $\lambda xr \in \mathsf{WN}$.
- Falls $r[x := s]\vec{s} \in \mathsf{WN}$, dann $(\lambda xr)s\vec{s} \in \mathsf{WN}$.

Der Unterschied zur Definition von SN ist lediglich das Weglassen von „$s \in \mathsf{SN}$" in der letzten Klausel.

1. Gib einen Term an, der in WN, nicht aber in SN ist und zeige ohne Verwendung des Normalisierungsresultats, daß dieser Term auch nicht mit Schnitt-Typen typisiert werden kann.

2. Definiere die Relation $\rightsquigarrow$ zwischen Lambda-Termen induktiv (dabei ist die Vektornotation elementweise zu verstehen, was die gleiche Länge der beiden Vektoren implizit verlangt)

   - $\vec{r} \rightsquigarrow \vec{r}\,' \Rightarrow x\vec{r} \rightsquigarrow x\vec{r}\,'$
   - $r \rightsquigarrow r' \land \vec{s} \rightsquigarrow \vec{s}\,' \Rightarrow (\lambda xr)\vec{s} \rightsquigarrow (\lambda xr')\vec{s}\,'$
   - $r[x := s]\vec{s} \rightsquigarrow t \Rightarrow (\lambda xr)s\vec{s} \rightsquigarrow t$

   $\rightsquigarrow$ ist reflexiv (3. Regel dafür unnötig).

   Zeige **Lemma 1**: $r \rightsquigarrow r' \land s \rightsquigarrow s' \Rightarrow rs \rightsquigarrow r's'$.

   Tip: Induktion über die Ableitung von $r \rightsquigarrow r'$.

3. Zeige **Lemma 2**: $\to_\beta \subseteq \rightsquigarrow \subseteq \to_\beta^*$.

   Tip: Für jede Inklusion Induktion über die Erzeugung der als kleiner zu beweisenden Relation.

siehe zweite Seite

[1] In der Aussage analog, nicht aber im Beweis!

4. Zeige **Lemma 3**: $r \rightsquigarrow r' \wedge s \rightsquigarrow s' \Rightarrow r[x := s] \rightsquigarrow r'[x := s']$.

   Tip: Induktion über die Ableitung von $r \rightsquigarrow r'$.

5. Zeige **Lemma 4**: $r \rightsquigarrow r' \to_\beta r'' \Rightarrow r \rightsquigarrow r''$.

   Tip: Induktion über die Ableitung von $r \rightsquigarrow r'$ und Überlegung, auf welche Weise dann jeweils $r' \to_\beta r''$ geschehen kann. Das ist die Hauptarbeit dieses Übungsblattes und braucht die Lemmata 1 und 3.

6. Zeige das **Korollar**: $r \to_\beta^* r' \Rightarrow r \rightsquigarrow r'$.

   Bemerkung: Damit haben wir $\to_\beta^* = \rightsquigarrow$, also ein neues Induktionsprinzip für $\to_\beta^*$ gelernt, nämlich Induktion über die Erzeugung von $\rightsquigarrow$. Bisher konnten wir ja nur über die Anzahl der Schritte in $r \to_\beta^* r'$ argumentieren.

7. Definiere nun $\rightsquigarrow^-$ durch Weglassen von $\vec{s}$ in der zweiten Klausel der Definition von $\rightsquigarrow$, weshalb offenbar $\rightsquigarrow^- \subseteq \rightsquigarrow$ gelten wird. Also sei $\rightsquigarrow^-$ definiert durch

   - $\vec{r} \rightsquigarrow^- \vec{r}\,' \Rightarrow x\vec{r} \rightsquigarrow^- x\vec{r}\,'$
   - $r \rightsquigarrow^- r' \Rightarrow \lambda x r \rightsquigarrow^- \lambda x r'$
   - $r[x := s]\vec{s} \rightsquigarrow^- t \Rightarrow (\lambda x r)s\vec{s} \rightsquigarrow^- t$

   Zeige **Lemma 5**: $r \rightsquigarrow^- r' \Rightarrow r \in \mathsf{WN} \wedge r' \in \mathsf{NF}$.

   Tip: Induktion über die Ableitung von $r \rightsquigarrow^- r'$.

8. Zeige **Lemma 6**: $r \in \mathsf{WN} \Rightarrow \exists r'.r \rightsquigarrow^- r'$.

9. Zeige **Lemma 7**: $r \rightsquigarrow r' \in \mathsf{NF} \Rightarrow r \rightsquigarrow^- r'$.

   Tip: Induktion über $\rightsquigarrow$. (Es gilt sogar, daß die Herleitung von $r \rightsquigarrow r'$ nur Regeln von $\rightsquigarrow^-$ benutzt, also keine Transformation nötig ist.)

10. **Satz** WN ist die Menge wn der Terme, die eine Normalform besitzen, also derjenigen Terme r, zu denen es ein $r' \in \mathsf{NF}$ gibt mit $r \to_\beta^* r'$.

    Beweis: „$\mathsf{WN} \subseteq \mathsf{wn}$“ Nach L. 6 gilt $r \rightsquigarrow^- r'$ für ein r'. Nach L. 5 ist $r' \in \mathsf{NF}$. Wegen $\rightsquigarrow^- \subseteq \to_\beta^*$ folgt $r \in \mathsf{wn}$.

    „$\mathsf{wn} \subseteq \mathsf{WN}$“ Gelte $r \to_\beta^* r' \in \mathsf{NF}$. Mit dem Korollar folgt $r \rightsquigarrow r' \in \mathsf{NF}$. L. 7 ergibt $r \rightsquigarrow^- r'$ und schließlich L. 5 $r \in \mathsf{WN}$.

    Aufgabe: Welche der beiden Teilaussagen braucht den vorgestellten trickreichen Ansatz?

Nun noch etwas mit Schnitt-Typen: Seien ι und κ zwei verschiedene Grundtypen. Zeige, daß es keinen Term r geben kann mit

$$\vdash r : ((\iota \to \kappa) \to \iota) \to \iota,$$

wobei $\vdash$ aus dem System mit den *Schnitt*-Typen genommen werde.

Bemerkung: Es ist sehr ratsam, den Normalisierungssatz zu verwenden.

Besprechung in der Übung am 19. Juni 2000.