Prof. Dr. Reinhold Letz
Dr. Ralph Matthes

Institut für Informatik
der Universität München

Übungsblatt 7

zur Vorlesung Lambda-Kalkül und Typen
im Sommer 2000
27. Juni 2000

1. Sei ρ beliebiger Typ mit $\alpha \notin \mathrm{FV}(\rho)$. Setze
$$\tau := 1 + (((\alpha \to \rho) \to \alpha) \to \alpha) \to \alpha.$$
Zeige, daß es in System F einen Term m gibt mit
$$\vdash m : \forall\alpha\forall\beta.(\alpha \to \beta) \to \tau \to \tau[\alpha := \beta].$$
Konstruiere damit einen geschlossenen Bewohner von $\mu\alpha\tau$, d. h. einen Term r mit $\vdash r : \mu\alpha\tau$. (Dabei sei $\mu\alpha\tau := \forall\alpha.(\tau \to \alpha) \to \alpha$ gemäß Vorlesung von heute. $1 := \forall\alpha.\alpha \to \alpha$ und $\rho + \sigma := \forall\alpha.(\rho \to \alpha) \to (\sigma \to \alpha) \to \alpha$ wurden am 20. Juni eingeführt.)

   Hinweis: Ohne die Typannotationen der abstrahierten Variablen ist eine Lösung für m gegeben durch:

   $\Lambda\alpha\Lambda\beta\lambda f\lambda x\Lambda\gamma\lambda z\lambda z_1.x\gamma z(\lambda z_2.z_1(\lambda z_3.z_3(\lambda z_4.f(z_2(\lambda z_5.z_5(\lambda z_6.z_4(fz_6)))))))$.

2. Zeige, daß es keinen Term r in System F gibt mit $\vdash r : 0$. ($0 := \forall\alpha\alpha$.)

   Hinweis: Studiere das Aussehen von Normalformen und benutze den (in der Vorlesung nicht bewiesenen, aber im Skriptum ausgeführten) Normalisierungssatz.

3. (Schwierige Aufgabe) Setze $\mathsf{cont}(\rho) := \mu\alpha.1 + (\alpha \to \rho) \to \rho$ für ein $\alpha \notin \mathrm{FV}(\rho)$, finde einen Term m, der die Monotonie von $1 + (\alpha \to \rho) \to \rho$ in α ausdrückt, und setze $D := \mathrm{C}_{\mathsf{cont}(\rho)}m(\mathsf{INL}_{1,(\mathsf{cont}(\rho)\to\rho)\to\rho}\mathsf{IN1})$ und $Cf := \mathrm{C}_{\mathsf{cont}(\rho)}m(\mathsf{INR}_{1,(\mathsf{cont}(\rho)\to\rho)\to\rho}f)$.

   (Die Definition von $\mathrm{C}_{\mathsf{cont}(\rho)}mt$ ist Instanz der Definition von $\mathrm{C}_{\mu\alpha\rho}mt$ in der heutigen Vorlesung.)

   Zeige, daß $\vdash D : \mathsf{cont}(\rho)$, und aus $\Gamma \vdash f : (\mathsf{cont}(\rho) \to \rho) \to \rho$ folgt $\Gamma \vdash Cf : \mathsf{cont}(\rho)$.

   Gib einen Term e an mit $\vdash e : \mathsf{cont}(\mathsf{nat}) \to \mathsf{nat}$ und $eD \to^*_{\beta\eta} 0$ und $e(Cf) \to^*_{\beta\eta} fe$ für alle Terme f (mit nat und 0 aus der Vorlesung).

   (Bemerkung: Dies ist Iteration über einem nicht-strikt positiven induktiven Datentypen. Da jeweils $\to^*_{\beta\eta}$ durch $\to^+_{\beta\eta}$—den transitiven Abschluß von $\to_{\beta\eta}$—ersetzt werden könnte, ist also auch eine solche Iteration von vorneherein stark normalisierend, weil System F es ist.)

Besprechung in der Übung am 3. Juli 2000.