Prof. Dr. Reinhold Letz
Dr. Ralph Matthes

Institut für Informatik
der Universität München

Übungsblatt 8

zur Vorlesung Lambda-Kalkül und Typen
im Sommer 2000
21. Juli 2000

1. Wir betrachten eine einfache Erweiterung von System F, die nicht normalisierend ist.

   Wir setzen $\sigma := \forall\alpha\forall\beta.(\alpha \to \alpha) \to \beta \to \beta$. Wir nehmen eine Konstante J vom Typ σ in unser System auf, d. h., wir zeichnen eine Variable aus, benennen sie mit J, abstrahieren nie über J und meinen mit $\Gamma \vdash r : \rho$ nunmehr $\Gamma, J : \sigma \vdash r : \rho$. Die Relation $\to_{\beta\eta}$ wird um einen weiteren Anfangsfall angereichert, nämlich $J\rho\rho r \to_{\beta\eta} r$. Dann gilt:

   $$\Gamma \vdash J\rho\rho r : \tau \Leftrightarrow \tau = \rho \to \rho \wedge \Gamma \vdash r : \tau,$$

   mithin Typerhaltung unter Reduktion (Subject Reduction). Beachte, daß die Regel $J\rho\rho r \to_{\beta\eta} r$ lediglich einen Abstieg zu einem Teilterm bewirkt. Da aber $\to_{\beta\eta}$ unter allen Termbildungsregeln abgeschlossen ist, läßt sich eine in dieser Erweiterung typisierbare Variante von $\omega\omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ finden, die wie $\omega\omega$ eine Reduktion in mehreren Schritten zu sich selbst erlaubt. Gib eine solche an.

   Tip: Der Typ $1 := \forall\alpha.\alpha \to \alpha$ ist wesentliches Hilfsmittel, da $\vdash \lambda x^1.x1x : 1 \to 1$ bereits in System F gilt.

2. Setze $\mathsf{tree}(\rho) := \mu\alpha.1 + (\rho \to \alpha)$ für ein $\alpha \notin \mathrm{FV}(\rho)$. Dann setze $\tau := \mathsf{tree}(\alpha) \to \alpha$. Zeige, daß es in System F einen Term m gibt mit

   $$\vdash m : \forall\alpha\forall\beta.(\alpha \to \beta) \to \tau \to \tau[\alpha := \beta].$$

   Konstruiere damit einen geschlossenen Bewohner von $\mu\alpha.1 + \tau$.

3. (zeitraubende Aufgabe) Zeige, daß die Funktion `breadth` aus dem Beispiel der Vorlesung (der Programmcode ist auf der WWW-Seite zu finden) in System F berechnet werden kann, wobei die Funktion `apply` als Konstante vom Typ $\mathsf{cont} \to (\mathsf{cont} \to \mathsf{list}) \to \mathsf{list}$ (siehe oben, wie das gemeint ist) anzunehmen ist. Dafür setze $\mathsf{nat} := \mu\alpha.1 + \alpha$, $\mathsf{list} := \mu\alpha.1 + \mathsf{nat} \times \alpha$ und $\mathsf{btree} := \mu\alpha.\mathsf{nat} + (\mathsf{nat} \times (\alpha \times \alpha))$.

   Hinweis: Die Mühsal besteht in der Bereitstellung all der Konstruktoren, was wiederum Monotoniezeugen verlangt.

Besprechung in der Übung am 24. Juli 2000.