Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. S. Braun
Dr. J. Johannsen

SS 2001

30. April 2001

Übungen zur Vorlesung
Formale Sprachen und Automaten

Blatt 1

Aufgabe 1: Für $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ sei die Sprache $L_k \subseteq \{0,1\}^*$ definiert durch $w \in L_k$ genau dann, wenn das k-te Zeichen von hinten gelesen in w eine 1 ist. Genauer ist $w = a_1 \dots a_n$ in L_k genau dann, wenn $a_{n-k+1} = 1$ ist.

Zeigen Sie, dass jeder DFA, der L_k erkennt, mindestens 2^k Zustände hat.

[*Hinweis*: Benutzen Sie die Äquivalenzrelation aus dem Beweis des Satzes von Myhill und Nerode.]

Aufgabe 2: Konstruieren Sie für $k \geq 3$ einen 2DFA mit $2k-1$ Zuständen, der die Sprache L_k aus Aufgabe 1 erkennt, und rechtfertigen Sie Ihre Konstruktion informell.

Wie steht es mit $k = 1, 2$?

Aufgabe 3: Konstruieren Sie einen NFA für die Sprache L_k aus Aufgabe 1 mit $k+1$ Zuständen, und beweisen Sie, dass er tatsächlich genau die Sprache L_k erkennt.

Besprechung in der Übung am 2. Mai 2001.

Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. S. Braun
Dr. J. Johannsen

SS 2001

7. Mai 2001

Übungen zur Vorlesung
Formale Sprachen und Automaten

Blatt 2

Aufgabe 4: Sei Σ_k ein k-elementiges Alfabet, und sei die Sprache $L_k \subseteq \Sigma_k^*$ definiert als die Menge aller Wörter w, derart dass es ein $a \in \Sigma_k$ gibt, dass in w genau einmal vorkommt.

1. Konstruieren Sie einen NFA mit $2k + 1$ Zuständen, der die Sprache L_k akzeptiert.
2. Zeigen Sie, dass jeder DFA, der L_k akzeptiert, mindestens 3^k Zustände hat.

Aufgabe 5: Geben Sie Moore-Automaten an, die das im Folgenden spezifizierte Ausgabeverhalten haben:

1. Das Eingabealfabet ist $\{0, 1\}$, und der Automat soll folgende Ausgabe produzieren:

$$\text{Ausgabe ist} \begin{cases} A & \text{falls die Eingabe endet mit 101} \\ B & \text{falls die Eingabe endet mit 110} \\ C & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Die Eingabe aus $\{0, 1, 2\}^*$ wird als Darstellung einer natürlichen Zahl n zur Basis 3 gelesen, und der Automat gibt den Rest $r = n \bmod 5$ aus ($r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$).

Aufgabe 6: Konstruieren Sie einen Mealy-Automaten, der bei Eingabe von $w \in \{a, b\}$ eine 1 ausgibt, falls die Anzahl der in w vorkommenden a durch 7 teilbar ist, und 0 sonst.

Besprechung in der Übung am 9. Mai 2001.

Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. S. Braun
Dr. J. Johannsen

SS 2001

14. Mai 2001

Übungen zur Vorlesung
Formale Sprachen und Automaten

Blatt 3

Aufgabe 7: Beweisen Sie, dass es keinen DFA gibt, der die Sprache

$$L = \{ w \in \{0,1\}^* \; ; \; w = 0^n 1^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \}$$

akzeptiert.

Aufgabe 8: Geben Sie Schaltwerke und die entsprechenden Mealy-Automaten an, die die folgenden Operationen durchführen:

1. Multiplikation mit $1 + X + X^2$,
2. Multiplikation mit $1 + X^3$,
3. Multiplikation mit $1 + X^2 + X^3$,
4. Division durch $1 + X^2$,
5. Division durch $X + X^3$,
6. Division durch $1 + X^2 + X^3$.

Besprechung in der Übung am 16. Mai 2001.

Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. S. Braun
Dr. J. Johannsen

SS 2001

21. Mai 2001

Übungen zur Vorlesung
Formale Sprachen und Automaten

Blatt 4

Aufgabe 9: Betrachten Sie die kontextfreie Sprache

$$L := \left\{ a^n b a^m b a^{n+m} \, ; \, n, m \geq 1 \right\} \ .$$

Ist auch das Komplement $\{a, b\}^* \setminus L$ der Sprache L kontextfrei? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 10: Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L := \left\{ a^n b^{n^2} \, ; \, n \in \mathbb{N} \right\}$$

nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 11: Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ seien definiert

$$\begin{aligned} \mathsf{MIN}(L) &:= \left\{ w \in L \, ; \, w \neq uv \text{ für alle } u \in L \text{ und } v \in \Sigma^+ \right\} \\ \mathsf{MAX}(L) &:= \left\{ w \in L \, ; \, wv \notin L \text{ für alle } v \in \Sigma^+ \right\} \end{aligned}$$

d.h. $\mathsf{MIN}(L)$ enthält die in der Präfixordnung minimalen und $\mathsf{MAX}(L)$ die maximalen Wörter in L. Zeigen Sie, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen nicht unter den Operationen MIN und MAX abgeschlossen ist.

Besprechung in der Übung am 23. Mai 2001.

Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. S. Braun
Dr. J. Johannsen

SS 2001

28. Mai 2001

Übungen zur Vorlesung
Formale Sprachen und Automaten

Blatt 5

Aufgabe 12: Sei G die kontextfreie Grammatik mit Startsymbol S, Nichtterminalen S, A, B, Terminalen a, b und den Produktionen

$$S \to aB \mid bA$$
$$A \to a \mid aS \mid bAA$$
$$B \to b \mid bS \mid aBB$$

und sei $w := aaabbabbba$.

1. Geben Sie alle lokalen Mehrdeutigkeiten von G an, und konstruieren Sie zu jeder solchen eine Sackgasse einer bottom-up-Analyse eines Wortes in $L(G)$.
2. Bestimmen Sie mindestens zwei Parse-Bäume für w mittels top-down-Analyse. Geben Sie zu einem dieser Parse-Bäume eine Links- und eine Rechtsableitung von w aus S an.
3. Zeigen Sie eine Sackgasse der top-down-Analyse von w auf, die mindestens drei Schritte lang ist. Wie lang können Sackgassen für w höchstens sein?

Aufgabe 13: Sei nun G' die Grammatik mit den selben Symbolen wie G, aber mit den Produktionen

$$S \to Ba \mid Ab$$
$$A \to a \mid Sa \mid AAb$$
$$B \to b \mid Sb \mid BBa$$

und sei $w' := abbbabbaaa = w^R$.

1. Geben Sie alle lokalen Mehrdeutigkeiten von G' an.
2. Konstruieren Sie einen nichtdeterministischen Kellerautomaten für $L(G')$.

3. Gewinnen Sie mittels top-down-Analyse einen Parse-Baum für w'.

4. Wie lang können Sackgassen der top-down-Analyse für w' höchstens sein? Warum unterscheidet sich das Ergebnis von dem in Aufgabe 12 ?

Aufgabe 14: Sei die Grammatik G gegeben durch

$$\begin{aligned} stmt &\to \texttt{if}\ expr\ \texttt{then}\ stmt\ \texttt{else}\ stmt\ \mid \\ &\quad\ \texttt{if}\ expr\ \texttt{then}\ stmt\ \mid \\ &\quad\ \texttt{nop} \\ expr &\to \texttt{0} \mid \texttt{1} \end{aligned}$$

1. Sei $w :=$ `if 0 then if 1 then nop else nop`. Geben Sie alle Ableitungsbäume für w bzgl. G an.

2. Wie könnte man G zu einer eindeutigen Grammatik umformen?

Besprechung in der Übung am 30. Mai 2001.

Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. S. Braun
Dr. J. Johannsen

SS 2001

11. Juni 2001

Übungen zur Vorlesung
Formale Sprachen und Automaten

Blatt 6

Aufgabe 15: Betrachten Sie die folgende Grammatik:

$$
\begin{aligned}
S &\to (L) \mid a \\
L &\to S, L \mid S
\end{aligned}
$$

Geben Sie eine Präzedenzmatrix für diese Grammatik an. Benutzen Sie diese zur syntaktischen Analyse der folgenden Wörter:
1. (a, a) 2. $(a, (a, a))$ 3. $(a, ((a, a), (a, a)))$.

Aufgabe 16: Handelt es sich bei der Grammatik G aus Aufgabe 14 um eine LL(1)-Gramnmatik?

Aufgabe 17: Gegeben Sei die Grammatik G mit Nichtterminalen S, A, B, Startsymbol S und den Produktionen

$$
\begin{aligned}
S &\to ABB \\
A &\to a \mid aS \\
B &\to b
\end{aligned}
$$

Konstruieren Sie einen deterministischen Kellerautomaten, der die von G erzeugte Sprache akzeptiert. Ist G eine LL(1)-Grammatik?

Aufgabe 18: Sei G die Grammatik der arithmetischen Ausdrücke mit Startsymbol E und nichtterminalen E, T, F:

$$
\begin{aligned}
E &\to E + T \mid T \\
T &\to T * F \mid F \\
F &\to (E) \mid \mathsf{id}
\end{aligned}
$$

1. Geben Sie zu G den nichttdeterministischen Automaten M der brauchbaren Anfänge an.

2. Wandeln Sie M zu einem deterministischen Automaten um.

3. Geben Sie einen deterministischen Kellerautomaten K zur syntaktischen Analyse von G an, und verarbeiten Sie mit K die Eingabe $\mathsf{id} * \mathsf{id} + \mathsf{id}$.

Besprechung in der Übung am 13. Juni 2001.

Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. S. Braun
Dr. J. Johannsen

SS 2001

18. Juni 2001

Übungen zur Vorlesung
Formale Sprachen und Automaten

Blatt 7

Aufgabe 19: Zeigen Sie ausführlich (!), dass die folgende Grammatik

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E} &\to \mathsf{TH} \\
\mathsf{H} &\to +\mathsf{TH} \mid \epsilon \\
\mathsf{T} &\to \mathsf{FK} \\
\mathsf{K} &\to *\mathsf{FK} \mid \epsilon \\
\mathsf{F} &\to (\mathsf{E}) \mid \mathsf{id}
\end{aligned}
$$

dieselbe Sprache erzeugt wie die Grammatik für arithmetische Ausdrücke aus Aufgabe 18.

Aufgabe 20: Sei G die Grammatik mit Nichtterminalen S', S, A, Startzeichen S', Terminalen a, b, c und den Produktionen

$$
\begin{aligned}
S' &\to Sc \\
S &\to SA \mid A \\
A &\to aSb \mid ab
\end{aligned}
$$

In der Vorlesung wurde diese Grammatik als LR(0) erkannt und dazu der deterministische endliche Automat der brauchbaren Anfänge und die Parse-Tabelle angegeben.

Konstruieren Sie explizit den zugehörigen deterministischen Kellerautomaten (mit ϵ-Übergängen) zur syntaktischen Analyse.

Besprechung in der Übung am 20. Juni 2001.

Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. S. Braun
Dr. J. Johannsen

SS 2001

2. Juli 2001

Übungen zur Vorlesung
Formale Sprachen und Automaten

Blatt 8

Aufgabe 21: Für $n \in \mathbb{N}$ sei die n-te Church-Ziffer $\underline{n}$ definiert als

$$\underline{n} := \lambda f.\lambda x.\underbrace{f(\ldots(f}_{n \text{ mal}}\,x)\ldots)$$

und für Lambda-Ausdrücke e und e' die Komposition $e \circ e'$ als

$$e \circ e' := \lambda x.e(e'x) \; .$$

1. Sind alle Church-Ziffern in Normalform?
2. Zeigen Sie, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\underline{m} \circ \underline{n} \to \underline{m \cdot n} \; .$$

Aufgabe 22: Definieren Sie durch Induktion über den Aufbau des Lambda-Ausdrucks e einen Ausdruck e^* wie folgt:

$$\begin{aligned} x^* &:= x \\ (\lambda x.e)^* &:= \lambda x.e^* \\ (e_1 e_2)^* &:= \begin{cases} [e_2^*/x]e & \text{falls } e_1^* = \lambda x.e \\ e_1^* e_2^* & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, soweit dies ohne Wissen über den Aufbau der Ausdrücke e_1 und e_2 möglich ist:

1. $((\lambda x.\lambda y.xyy)e_1 e_2)^*$
2. $((\lambda x.x)(\lambda y.e_1)e_2)^*$
3. $((\lambda x.xe_1)(\lambda y.e_2))^*$, wobei x nicht frei in e_1 vorkommt.

Besprechung in der Übung am 4. Juli 2001.

Institut für Informatik der Universität München
Prof. Dr. S. Braun
Dr. J. Johannsen

SS 2001

9. Juli 2001

Übungen zur Vorlesung
Formale Sprachen und Automaten

Blatt 9

Aufgabe 23: In der Vorlesung wurden die Kombinatoren I, K, B, C, W und S definiert, und die Gleichungen $I = SKK$ und $B = S(KS)K$ gezeigt. Rechnen Sie die folgende Gleichung nach:

$$\begin{aligned} C &= S(BBS)(KK) \\ W &= CSI \end{aligned}$$

Aufgabe 24: Sei der Kombinator Y definiert als

$$Y := \lambda f.\big(\lambda x.f(xx)\big)\big(\lambda x.f(xx)\big) .$$

Zeigen Sie, dass für jeden Lambda-Ausdruck F gilt

$$F(YF) = YF .$$

Y heisst daher der *Fixpunkt-Kombinator*; er wird zur Definition rekursiver Funktionen gebraucht.

Aufgabe 25: Kombinatorische Ausdrücke seien Lambda-Ausdrücke, die nur aus Variablen und den Kombinatoren K und S aufgebaut sind. Induktiv definiert man für jede Variable x und kombinatorischen Ausdruck e einen Ausdruck $\lambda^*x.e$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \lambda^*x.x &:= I , \\ \lambda^*x.e &:= Ke && \text{falls } x \text{ in } e \text{ nicht frei vorkommt,} \\ \lambda^*x.e_1e_2 &:= S(\lambda^*x.e_1)(\lambda^*x.e_2) . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für alle kombinatorischen Ausdrücke e_1, e_2 gilt

$$(\lambda^*x.e_1)e_2 \;\to\; [e_2/x]e_1 .$$

Dies zeigt die Vollständigkeit der Kombinatoren K und S, d.h. dass alle Kombinatoren aus diesen definiert werden können.

Besprechung in der Übung am 9. Juli 2001

Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. S. Braun
Dr. J. Johannsen

SS 2001

16. Juli 2001

Übungen zur Vorlesung
Formale Sprachen und Automaten

Blatt 10

Aufgabe 26: Geben Sie das Schaltwerk zur Multiplikation mit X^3+X+1 an, und bestimmen Sie den entsprechenden Mealy-Automaten.

Welche Ausgabe erzeugt der Automat bei Eingabe der Codierung des Polynoms X^2+X+1? Wie ist diese Ausgabe zu interpretieren?

Aufgabe 27: Betrachten Sie die folgende Grammatik G:

$$\begin{aligned} S &\to E\# \\ E &\to aA \mid bB \\ A &\to cA \mid d \\ B &\to cB \mid d \end{aligned}$$

1. Ist G eine LR(0)-Grammatik?
2. Bestimmen Sie den deterministischen Automaten der brauchbaren Anfänge für G.
3. Geben Sie ggf. die LR(0)-Parsingtabelle an und simulieren Sie das Verhalten des LR-Kellerautomaten bei Eingabe von $acccd\#$ und $bcccd\#$.

Aufgabe 28: Wie in Aufgabe 21 seien die Church-Ziffern definiert als

$$\underline{n} := \lambda f.\lambda x.\underbrace{f(\ldots(f\,x)\ldots)}_{n \text{ mal}}\ ,$$

und die Lambda-Ausdrücke S und P seien definiert durch

$$S := \lambda n.\lambda f.\lambda x.f(nfx)$$
$$P := \lambda n.n(\lambda \ell.\ell(\lambda x.\lambda y.y\underline{0})(\lambda k.\lambda x.\lambda y.y(Sk)))(\lambda x.\lambda y.x)\underline{0}(\lambda x.x)$$

Berechnen Sie ausführlich die β-Normalform von $P\underline{2}$. Welche Funktion berechnet P?

Besprechung in der Übung am 18. Juli 2001