Prof. Dr. Ulf Schmerl
Dr. Ralph Matthes

Institut für Informatik
der Universität München

Übungsblatt 3

zur Vorlesung Termersetzungssysteme
im Sommersemester 2001
17. Mai 2001

1. [2, Exercise 2.6] Eine Relation $\rightarrow$ heißt beschränkt, wenn es zu jedem x aus der Trägermenge ein $n \in \mathbb{N}$ gibt so, daß keine Reduktionsfolge der Länge n von x aus geht, d. h. für alle y gilt: $x \not\rightarrow^n y$.
   - Zeige, daß nicht jede terminierende Relation beschränkt ist.
   - Zeige, daß eine endlich verzweigende Relation genau dann beschränkt ist, wenn sie terminiert.
2. [1, Aufgabe 1.2.7] Sei $\rightarrow$ eine beschränkte Relation. Dann folgt aus der lokalen Konfluenz von $\rightarrow$ die Konfluenz von $\rightarrow$.
3. [2, Exercise 2.25] Sei $>$ strikte Ordnung auf M und $m, n \in \mathcal{M}(M)$. Dann gilt:
$$m >_{mul} n \Leftrightarrow m \neq n \wedge \forall x \in n \setminus m \, \exists y \in m \setminus n . y > x.$$
   Bemerkung: Damit läßt sich in konkreten Fällen leichter prüfen, ob $m >_{mul} n$ gilt.
4. [3, Aufgabe 2.2] Finde eine Signatur, bzgl. der die folgenden Ausdrücke Terme über der Variablenmenge $\{x, y\}$ sind: $f(g(a,x), g(x,a)), h(b, y, f(b,x)), g(g(g(x,x), g(x,x)), x)$. Stelle sie als Bäume dar. Sei $\sigma := \{x \mapsto a, y \mapsto b\}$ eine Substitution. Wende $\hat{\sigma}$ (d. h. die auf Terme erweiterte Substitution σ) auf die obigen Terme an.
5. [2, Exercise 3.3] Definiere für Substitutionen $\sigma, \tau : X \rightarrow T(\Sigma, X)$ die Substitution $\sigma\tau$ durch $(\sigma\tau)(x) := \hat{\sigma}(\tau(x))$. Zeige, daß dies in der Tat eine Substitution ergibt und daß die so definierte Komposition von Substitutionen assoziativ ist, d.h. $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$.
6. [2, Exercise 2.37] sowie [1, Aufgabe 1.3.3] Seien $\rightarrow_1$ und $\rightarrow_2$ Reduktionsrelationen über derselben Trägermenge und sei $\rightarrow := \rightarrow_1 \cup \rightarrow_2$ transitiv. Zeige, daß $\rightarrow$ genau dann terminiert, wenn $\rightarrow_1$ und $\rightarrow_2$ terminieren.

Literatur

[1] Jürgen Avenhaus. *Reduktionssysteme—Rechnen und Schließen in gleichungsdefinierten Strukturen.* Springer Verlag, 1995.

[2] Franz Baader and Tobias Nipkow. *Term Rewriting and All That.* Cambridge University Press, 1998.

[3] Reinhard Bündgen. *Termersetzungssysteme—Theorie, Implementierung, Anwendung.* Vieweg, 1998.

Besprechung in der Übung am **23. Mai 2001**.