Prof. Dr. Ulf Schmerl
Dr. Ralph Matthes

Institut für Informatik
der Universität München

Übungsblatt 6

zur Vorlesung Termersetzungssysteme
im Sommersemester 2001
15. Juni 2001

1. [1, Exercise 5.11] Sei $\Sigma := \{+, s, d, q, 0\}$ mit $+$ zweistellig, s, q, d einstellig und 0 Konstante. Das Termersetzungssystem R bestehe aus den Regeln
$$\begin{aligned} x + 0 &\to x \\ x + s(y) &\to s(x + y) \\ d(0) &\to 0 \\ d(s(x)) &\to s(s(d(x))) \\ q(0) &\to 0 \\ q(s(x)) &\to q(x) + s(d(x)) \end{aligned}$$
Zeige, daß man mit $A := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und $P_0 := 2$, $P_s := X + 1$, $P_+ := X + 2Y$, $P_d := 3X$ sowie $P_q := X^3$ die Terminierung von R mittels Polynominterpretation beweisen kann.

2. [2, Example 11] Wir betrachten Terme, die einstellige Funktionen syntaktisch beschreiben. Setze $\Sigma := \{\underline{c} \mid c \in \mathbb{R}\} \cup \{I, +, -, \times, /, \uparrow, \ln, D\}$. Dabei beschreibe $\underline{c}$ die entsprechende konstante Funktion, I die Identität, $+, -, \times, /$ die naheliegenden binären Verknüpfungen einstelliger Funktionen, $\uparrow$ die Exponentiation, ln das Nachschalten des natürlichen Logarithmus sowie D die Differentiation. Die Termersetzungsregeln seien
$$\begin{aligned} D(\underline{c}) &\to \underline{0} \\ D(I) &\to \underline{1} \\ D(x + y) &\to D(x) + D(y) \\ D(x - y) &\to D(x) - D(y) \\ D(x \times y) &\to (y \times D(x)) + (x \times D(y)) \\ D(x/y) &\to (D(x)/y) - x \times (D(y)/(y \uparrow \underline{2})) \\ D(x \uparrow y) &\to (y \times (x \uparrow (y - \underline{1})) \times D(x)) + ((x \uparrow y) \times \ln(x) \times D(y)) \\ D(\ln(x)) &\to D(x)/x \end{aligned}$$
Zeige, daß man mit $A := \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$ und $P_{\underline{c}} := 4$, $P_I := 4$, $P_{op} := X + Y$ für $op \in \{+, -, \times, /, \uparrow\}$, $P_{\ln} := X + 1$ sowie $P_D := X^2$ die Terminierung dieses Systems mittels Polynominterpretation beweisen kann.

3. [1, Exercise 5.6] Sei Σ eine Signatur mit mindestens einer Konstanten und sei $>$ eine totale Reduktionsordnung auf $T(\Sigma, \emptyset)$, d.h., $>$ ist Reduktionsordnung auf $T(\Sigma, \emptyset)$, die zusätzlich total ist (für alle s, t gilt: $s > t$ oder $s = t$ oder $t > s$). Sei weiter V eine beliebige Variablenmenge. Eine Substitution σ auf $T(\Sigma, V)$ heißt geschlossen auf $X \subseteq V$, wenn $\sigma(x) \in T(\Sigma, \emptyset)$ für alle $x \in X$.

   Definiere eine binäre Relation $\succ$ auf $T(\Sigma, V)$ durch $s_1 \succ s_2 :\Leftrightarrow \hat{\sigma}(s_1) > \hat{\sigma}(s_2)$ für alle auf $Var(s_1) \cup Var(s_2)$ geschlossenen Substitutionen σ.

   Zeige, daß $\succ$ die größte Reduktionsordnung auf $T(\Sigma, V)$ ist, die $>$ umfaßt.

Literatur

[1] Franz Baader and Tobias Nipkow. *Term Rewriting and All That.* Cambridge University Press, 1998.

[2] Nachum Dershowitz. 33 examples of termination. In H. Comon and J.-P. Jouannaud, editors, *Term Rewriting, French Spring School of Theoretical Computer Science, Font Romeux, France, May 1993*, volume 909 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 16–26. Springer Verlag, 1995.

Besprechung in der Übung am **20. Juni 2001**.