Prof. Dr. Ulf Schmerl
Dr. Ralph Matthes

Institut für Informatik
der Universität München

Übungsblatt 9

zur Vorlesung Termersetzungssysteme
im Sommersemester 2001
13. Juli 2001

1. [2, Exercise 7.1, E_2] Sei $\Sigma := \{f, g\}$ mit zwei einstelligen Funktionssymbolen. Beschreibe das Ergebnis der Anwendung des grundlegenden Vervollständigungsalgorithmus auf das Gleichungssystem

$$\{f(g(f(x))) \approx f(g(x))\}$$

nach Zugrundelegung einer passenden Reduktionsordnung. Beweise die Richtigkeit dieser Beschreibung. Was genau sagt uns der Satz über die Korrektheit (7.1.4) des grundlegenden Vervollständigungsalgorithmus in diesem Beispiel?

Hinweis: Die Klammern sollten hier wie in Aufgabe 2 von Blatt 8 grundsätzlich weggelassen werden.

2. [3, Variante von Aufgaben 7.7 und 10.3] Seien

$$R_0 := \{x + (y + z) \to (x + y) + z, f(x) + f(y) \to f(x + y)\}$$

und

$$R := R_0 \cup \{x + f(y + z) \to (x + f(y)) + f(z)\}$$

Zeige die Terminierung von R mittels einer Polynomordnung. (Tip: $P_f := X + 1$, $P_+ := XY^2$). Zeige, daß $x + f(y + z) \leftrightarrow^*_{R_0} (x + f(y)) + f(z)$ gilt. Ist R konfluent?

3. [1, Aufgabe 3.7.6 a)] (Die Notation folgt [2, Exercise 7.12].) Zeige, daß das folgende Termersetzungssystem für die Gruppentheorie terminiert. (Tip: Es geht mit $>_{lpo}$.)

$\Sigma := \{1, i, *\}$ mit 1 Konstante, i einstellig (Inverse), $*$ binär.

$$\begin{aligned}
(x * y) * z &\to x * (y * z)\\
1 * x &\to x\\
i(x) * x &\to 1\\
x * 1 &\to 1\\
x * i(x) &\to 1\\
i(1) &\to 1\\
i(i(x)) &\to x\\
i(x * y) &\to i(y) * i(x)\\
x * (i(x) * y) &\to y\\
i(x) * (x * y) &\to y
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die ersten 3 Regeln entsprechen den minimalen Axiomen der Gruppentheorie, die anderen lassen sich durch Vervollständigung daraus gewinnen (in der Algebra zieht man diese Regeln „aus dem Hut“). Den Nachweis der Konfluenz des Systems überläßt man einer Implementierung des Vervollständigungsalgorithmus.

Literatur

[1] Jürgen Avenhaus. *Reduktionssysteme—Rechnen und Schließen in gleichungsdefinierten Strukturen.* Springer Verlag, 1995.

[2] Franz Baader and Tobias Nipkow. *Term Rewriting and All That.* Cambridge University Press, 1998.

[3] Reinhard Bündgen. *Termersetzungssysteme—Theorie, Implementierung, Anwendung.* Vieweg, 1998.

Abgabe vor und Besprechung in der Übung am **18. Juli 2001**.