

0.1 Types

”well-typed programs do not go wrong”.

$$T ::= Int \mid String$$

0.1 Definition. Die Typisierungsrelation $t : T$ ist gegeben durch folgende Schlussregeln (Inferenzregeln):

$$\frac{}{i:Int} T - Int \quad \frac{}{s:String} T - String \quad \frac{t_1:Int \ t_2:Int}{t_1 \ plus \ t_2:Int} T - Plus \quad \frac{t_1:Int \ t_2:Int}{t_1 \ minus \ t_2:Int} T - Minus$$

$$\frac{t:String}{t:Int} T - Len \quad \frac{t:Int}{t:String} T - Str$$

0.2 Definition. Ein Typsystem ist eine Term-/Programmiersprache zusammen mit einer Typisierungsrelation.

0.3 Definition. Ein Typsystem ist deterministisch, wenn zu jedem Term t höchstens ein Typ T existiert mit $t : T$.

0.4 Definition. Ein Typsystem ist entscheidbar, wenn ein Algorithmus existiert, der für jeden Term t und jeden Typ T entscheidet, ob $t : T$. Ein solcher Algorithmus heißt Typprüfungs- bzw. Type-Checking-Algorithmus.

0.5 Definition. Ein Algorithmus, der zu einem gegebenen Term t einen Typ T berechnet, heißt Typinferenz.

Beispiel.
$$\frac{\frac{\frac{n:hallo':String}{len''hallo':Int} T - String \quad \frac{}{i:Int} T - Int}{(len''hallo'+1):Int} T - Len \quad \frac{}{i:Int} T - Int}{str(len''hallo'+1):String} T - Plus} T - Str$$

0.6 Definition. Ein Typsystem ist sicher, falls es folgende zwei Eigenschaften besitzt.

1. Fortschritt (Progress). Ist ein Term wohlgetypt und kein Wert, so kann man ihn auswerten.
2. Typerhaltung (Preservation, Subject Reduction). Ist ein Term wohlgetypt, besitzt er nach Auswertung noch den selben Typ.

0.7 Satz. (Typerhaltung)

Falls $t : T$ und $t \rightarrow t'$, dann $t' : T$.

Proof. Induktion über $t : T$.

Fall $\frac{}{c:Int} T - Int$ denn $i \not\rightarrow$

Fall $\frac{}{s:String} T - String$. $s \not\rightarrow$

Fall $\frac{t_1:Int \ t_2:Int}{t_1 \ plus \ t_2:Int} T - Plus$.

Unterfall $\frac{t_1 \rightarrow t'_1}{t_1 \ plus \ t_2 \rightarrow t'_1 \ plus \ t_2} E - PlusTT \quad \frac{t'_1:Int^1 \ t_2:Int^2}{t'_1 \ plus \ t_2:Int} T - Plus$

Unterfall $\frac{t_2 \rightarrow t'_2}{i_1 \text{ plus } t_2 \rightarrow i_2 \text{ plus } t'_2} E - PlusVT$ Nach I.V. $t'_2 : Int$
 Somit

$$\frac{\frac{i_1 : Int}{i_1 \text{ plus } t_2 : Int} T - Int \quad t'_2 : Int}{i_1 \text{ plus } t'_2 : Int} T - Plus$$

Unterfall $\frac{\frac{i_1 : Int}{i_1 \text{ plus } i_2 \rightarrow (i_1 + i_2)} E - PlusVV}{(i_1 + i_2) : Int} T - Int$

□

0.8 Satz. (Fortschritt)

Falls $t : T$, dann entweder $t = v$ oder $t \rightarrow t'$