# Variablen und Namen

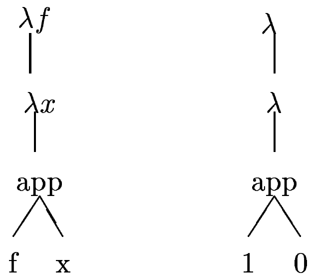
### Vorbemerkung

$[s/x](\lambda y.t) \neq \lambda y[s/x]t$
$\qquad\qquad\qquad \lambda y'[s/y][y'/y]t \qquad y'$ neu

### Namenlose Repräsentation von $\lambda$-Termen nach Nicolas de Bruijn [AutoMath]

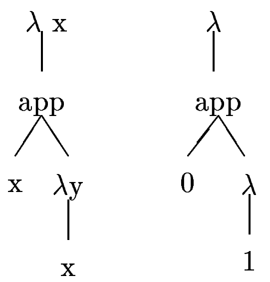
(Alle freien Variablen müssen dafür im Kontext gebunden werden.)
$\lambda f \lambda x.fx$

$\lambda\lambda.1\ \ 0$ (nach de Bruijn)



Mit Namen versehen: $\lambda^f\lambda^x.1\ \ 0$

$\lambda x.x(\lambda y.x)$
$\lambda.0(\lambda.1)$ (de Bruijn)



**Wie drucke ich** $\quad \lambda^f.0\lambda^x.1\ 0 \rightarrow \lambda f.f(\lambda x.f\ x)$

$$0 \mapsto f \rightarrow \lambda^f.0\lambda^x.1\ 0 = \lambda f.$$
$$\vdash 0\lambda^x.1\ 0 = \qquad\qquad f(\lambda x.$$
$$1 \mapsto f, 0 \mapsto x \vdash 1\ 0 \qquad\qquad f\ x)$$

### Substitiution

| | |
|---|---|
| $[s/x]\ \ x = s$ | $[s/j]\ \ j = s$ |
| $[s/x]\ \ y = y\ \ (y \neq x)$ | $[s/j]\ \ i = i\ \ (i \neq j)$ |
| $[s/x]\ \lambda yt = \lambda y'.[s/x][y'/y]t$ | $[s/j]\lambda t = \lambda[\uparrow s/j+1]t$ |
| $[s/x](t_1\ t_2) = ([s/x]\ t_1)([s/x]\ t_2)$ | $[s/j](t_1\ t_2) = ([s/j]\ t_1)([s/j]\ t_2)$ |

Dabei ist der schwierigste Fall die

**Abstraktion**

$$[\lambda x\ x/x]\lambda y.x = \lambda y \lambda x x$$
$$0 \mapsto x \vdash [\lambda 0/0]\lambda.1 = \lambda[\lambda 0/1]1 = \lambda\lambda 0$$
$$[\lambda z.x]\lambda y\ x = \lambda y \lambda z x$$
$$x \vdash [\lambda 1/0]\lambda 1 = \lambda[\lambda 2/1] = \lambda\lambda 2$$

$$\begin{aligned} \uparrow \lambda 1 &= \lambda 2 \\ \uparrow 0 &= 1 \\ \uparrow \lambda 0 &= \lambda 0 \\ \Rightarrow [s/j]\lambda t &= \lambda[\uparrow s/j+1]t \end{aligned}$$

Bleibt die Definition von $\uparrow$

$\underset{1}{\overset{z}{\uparrow}}\underset{0}{\overset{f}{\uparrow}}$ $\quad \vdash \lambda x \lambda y.x(y\ z)$

$\vdash \lambda\lambda.1(0\ 3)$

$\underset{2}{\overset{z}{\uparrow}}\underset{1}{\overset{f}{\uparrow}}\underset{0}{\overset{g}{\uparrow}}$ $\quad \vdash\uparrow_0^1 \lambda\lambda.1(0\ 3) \to \lambda\lambda.1(0\ 4)$

Hierbei wird folgende Syntax verwendet: $\uparrow^{\text{Verschiebungsanzahl}}_{\text{Untergrenze}}$

$z, f, g \quad \vdash\uparrow_0^1 \lambda^x\lambda^y.1(0\ 3)$

$\underset{3,2,1,0}{z, f, g, x} \quad \vdash \lambda \uparrow_1^1 \lambda.1(0\ 3)$

$z, f, g, x, y \quad \vdash \lambda\lambda \uparrow_2^1 .1(0\ 3)$

$\lambda\lambda.(\uparrow_2^1 1)(\uparrow_2^1 0\ 3)$

$\lambda\lambda.1(0\ 4)$

**0.1 Definition.** Shifting
$\uparrow_c^d t$ verschiebt in $t$ alle Indizes $\geq c$ um $d$ nach oben.

$$\uparrow_c^d i = \begin{cases} i+d & \text{, falls } i \geq c \\ i & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\uparrow_c^d \lambda t = \lambda \uparrow_{c+1}^d t$$
$$\uparrow_c^d (t_1\ t_2) = (\uparrow_c^d t_1)(\uparrow_c^d t_2)$$