Kapitel 6

Erweiterungen des getypten Lambda-Kalküls

6.1 Der ein-elementige Typ

6.2 Befehlssequenzen und `let`

6.3 Produkttypen

6.4 Datensatztypen

6.5 Rekursion

6.6 Zusammenfassung

6.6.1 Syntax

Typen.

$$
\begin{array}{rcll}
T & ::= & T_1 \to T_2 & \text{Funktionstyp} \\
 & | & \texttt{Int} & \text{Typ der Ganzzahlen} \\
 & | & \texttt{Bool} & \text{Typ der Wahrheitswerte} \\
 & | & \texttt{Unit} & \text{Ein-elementiger Typ} \\
 & | & T_1 \times T_2 & \text{Produkttyp} \\
 & | & \{\overrightarrow{l\!:\!T}\} & \text{Datensatz-Typ}
\end{array}
$$

Terme.

t	$::=$	$x \mid \lambda x{:}T\ t \mid t_1\ t_2$	Variablen, Funktionen, Anwendung
	$\mid$	$i \mid t_1 + t_2 \mid t_1 - t_2 \mid \texttt{iszero}\ t$	Ganzzahl-Konstanten, Addition, Subtraktion, Test auf 0
	$\mid$	$\texttt{true} \mid \texttt{false} \mid \texttt{if}\ t_1\ \texttt{then}\ t_2\ \texttt{else}\ t_3$	Wahrheitswerte, Fallunterscheidung
	$\mid$	$()$	Leeres Tupel
	$\mid$	$(t_1, t_2) \mid t.1 \mid t.2$	Paarbildung und Projektionen
	$\mid$	$\{l_1 = t_1, \ldots, l_n = t_n\} \mid t.l$	Datensatz und Projektion
	$\mid$	$\texttt{let}\ x = t_1\ \texttt{in}\ t_2$	Lokale Variablen
	$\mid$	$\texttt{fix}\ f{:}T\ t$	Rekursion

Werte.

v	$::=$	$\lambda x{:}Tt$	Funktionen
	$\mid$	i	Ganzzahl-Konstanten
	$\mid$	$\texttt{true} \mid \texttt{false}$	Wahrheitswerte
	$\mid$	$()$	Leeres Tupel
	$\mid$	(v_1, v_2)	Paar von Werten
	$\mid$	$\{l_1 = v_1, \ldots, l_n = v_n\}$	Datensatz von Werten

6.6.2 Auswertung mit Call-by-Value

Einzelschritt-Auswertung.

$$t \longrightarrow t'$$

Lambda-Kalkül Berechnung.

$$\frac{}{(\lambda x{:}T\ t)\ v \longrightarrow [v/x]t}\ \textsc{E-Beta}$$

Kongruenz.

$$\frac{t_1 \longrightarrow t_1'}{t_1\ t_2 \longrightarrow t_1'\ t_2}\ \textsc{E-AppTT} \qquad \frac{t \longrightarrow t'}{v\ t \longrightarrow v\ t'}\ \textsc{E-AppVT}$$

Ganzzahlen Berechnung.

$$\frac{i_3 = i_1 + i_2}{i_1 + i_2 \longrightarrow i_3}\ \textsc{E-PlusVV} \qquad \frac{i_3 = i_1 - i_2}{i_1 - i_2 \longrightarrow i_3}\ \textsc{E-MinusVV}$$

$$\frac{}{\texttt{iszero}\ 0 \longrightarrow \texttt{true}}\ \textsc{E-IsZeroTrue} \qquad \frac{i \neq 0}{\texttt{iszero}\ i \longrightarrow \texttt{false}}\ \textsc{E-IsZeroFalse}$$

Kongruenz.

$$\frac{t_1 \longrightarrow t_1'}{t_1 + t_2 \longrightarrow t_1' + t_2}\ \textsc{E-PlusTT} \qquad \frac{t_1 \longrightarrow t_1'}{t_1 - t_2 \longrightarrow t_1' - t_2}\ \textsc{E-MinusTT}$$

$$\frac{t \longrightarrow t'}{i + t \longrightarrow i + t'}\ \textsc{E-PlusVT} \qquad \frac{t \longrightarrow t'}{i - t \longrightarrow i - t'}\ \textsc{E-MinusVT}$$

$$\frac{t \longrightarrow t'}{\texttt{iszero}\ t \longrightarrow \texttt{iszero}\ t'}\ \textsc{E-IsZero}$$

Wahrheitswerte Berechnung.

$$\frac{}{\texttt{if true then } t_2 \texttt{ else } t_3 \longrightarrow t_2}\ \textsc{E-IfTrue} \qquad \frac{}{\texttt{if false then } t_2 \texttt{ else } t_3 \longrightarrow t_3}\ \textsc{E-IfFalse}$$

Kongruenz.

$$\frac{t_1 \longrightarrow t_1'}{\texttt{if } t_1 \texttt{ then } t_2 \texttt{ else } t_3 \longrightarrow \texttt{if } t_1' \texttt{ then } t_2 \texttt{ else } t_3}\ \textsc{E-If}$$

Leeres Tupel Keine Auswertungsregeln.

Paare Berechnung.

$$\frac{}{(v_1, v_2).1 \longrightarrow v_1}\ \textsc{E-PairBeta}_1 \qquad \frac{}{(v_1, v_2).2 \longrightarrow v_2}\ \textsc{E-PairBeta}_2$$

Kongruenz.

$$\frac{t_1 \longrightarrow t_1'}{(t_1, t_2) \longrightarrow (t_1', t_2)}\ \textsc{E-PairTT} \qquad \frac{t \longrightarrow t'}{(v, t) \longrightarrow (v, t')}\ \textsc{E-PairVT}$$

Datensätze Berechnung.

$$\frac{}{\{\overrightarrow{l\!=\!v}\}.l_i \longrightarrow v_i}\ \textsc{E-RecordBeta}$$

Kongruenz.

$$\frac{t \longrightarrow t'}{\{\overrightarrow{l\!=\!v}, l'\!=\!t, \overrightarrow{l''\!=\!t''}\} \longrightarrow \{\overrightarrow{l\!=\!v}, l'\!=\!t', \overrightarrow{l''\!=\!t''}\}}\ \textsc{E-Record}$$

Lokale Variablen Berechnung.

$$\frac{}{\texttt{let } x\!=\!v \texttt{ in } t \longrightarrow [v/x]t}\ \textsc{E-LetBeta}$$

Kongruenz.

$$\frac{t_1 \longrightarrow t_1'}{\texttt{let } x\!=\!t_1 \texttt{ in } t_2 \longrightarrow \texttt{let } x\!=\!t_1' \texttt{ in } t_2}\ \textsc{E-Let}$$

Rekursion Berechnung.

$$\frac{}{\texttt{fix}\, f\!:\!T\ t \longrightarrow [\texttt{fix}\, f\!:\!T\ t/f]t}\ \textsc{E-Fix}$$

6.6.3 Typisierung

Kontexte.

$$\begin{array}{rcll} \Gamma & ::= & \cdot & \text{leerer Kontext} \\ & | & \Gamma, x{:}T & \text{erweiterter Kontext} \end{array}$$

Typisierungsrelation.

$$\Gamma \vdash t : T$$

Lambda-Kalkül

$$\frac{(x{:}T) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T} \text{ T-VAR}$$

Einführung.

$$\frac{\Gamma, x{:}S \vdash t : T}{\Gamma \vdash \lambda x{:}S\ t\ : S \to T} \text{ T-LAM}$$

Beseitigung.

$$\frac{\Gamma \vdash t : S \to T \qquad \Gamma \vdash s : S}{\Gamma \vdash t\ s\ :\ T} \text{ T-APP}$$

Ganzzahlen Einführung.

$$\frac{}{\Gamma \vdash i : \mathtt{Int}} \text{ T-INT}$$

Beseitigung.

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : \mathtt{Int} \qquad \Gamma \vdash t_2 : \mathtt{Int}}{\Gamma \vdash t_1 + t_2 : \mathtt{Int}} \text{ T-PLUS} \qquad \frac{\Gamma \vdash t_1 : \mathtt{Int} \qquad \Gamma \vdash t_2 : \mathtt{Int}}{\Gamma \vdash t_1 - t_2 : \mathtt{Int}} \text{ T-MINUS}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \mathtt{Int}}{\Gamma \vdash \mathtt{iszero}\ t : \mathtt{Bool}} \text{ T-ISZERO}$$

Wahrheitswerte Einführung.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathtt{true} : \mathtt{Bool}} \text{ T-TRUE} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathtt{false} : \mathtt{Bool}} \text{ T-FALSE}$$

Beseitigung.

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : \mathtt{Bool} \qquad \Gamma \vdash t_2 : T \qquad \Gamma \vdash t_3 : T}{\Gamma \vdash \mathtt{if}\ t_1\ \mathtt{then}\ t_2\ \mathtt{else}\ t_3\ :\ T} \text{ T-IF}$$

Leeres Tupel Einführung.

$$\frac{}{\Gamma \vdash () : \mathtt{Unit}} \text{ T-UNIT}$$

Keine Beseitigung.

Paare Einführung.

$$\frac{\Gamma \vdash t_1 : T_1 \qquad \Gamma \vdash t_2 : T_2}{\Gamma \vdash (t_1, t_2) : T_1 \times T_2} \text{ T-}\textsc{Pair}$$

Beseitigung.

$$\frac{\Gamma \vdash t : T_1 \times T_2}{\Gamma \vdash t.1 : T_1} \text{ T-}\textsc{Proj}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash t : T_1 \times T_2}{\Gamma \vdash t.2 : T_2} \text{ T-}\textsc{Proj}_2$$

Datensätze Einführung.

$$\frac{\Gamma \vdash t_i : T_i \;\text{ für }\; i = 1 \ldots n}{\Gamma \vdash \{\overrightarrow{l{=}t}\} : \{\overrightarrow{l{:}T}\}} \text{ T-}\textsc{Record}$$

Beseitigung.

$$\frac{\Gamma \vdash t : \{\overrightarrow{l{:}T}\}}{\Gamma \vdash t.l_i : T_i} \text{ T-}\textsc{Proj}$$

Lokale Variablen

$$\frac{\Gamma \vdash s : S \qquad \Gamma, x{:}S \vdash t : T}{\Gamma \vdash \texttt{let}\ x{=}s\ \texttt{in}\ t\ :\ T} \text{ T-}\textsc{Let}$$

Rekursion

$$\frac{\Gamma, f{:}T \vdash t : T}{\Gamma \vdash \texttt{fix}\, f{:}T\ t\ :\ T} \text{ T-}\textsc{Fix}$$