Institut für Informatik
der Universität München
Dr. J. Johannsen
Dr. R. Matthes

SS 2003

13. Mai 2003

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen

Blatt 5

Aufgabe 19: Fügen Sie die Schlüssel 10, 22, 31, 4, 15, 28, 17, 88, 59 der Reihe nach ein in eine offen adressierte Hashtabelle der Größe $m = 11$ unter Verwendung der Hashfunktion $h'(k) = (k \bmod 11) + 1$ und

(a) Linearem Sondieren

(b) Quadratischem Sondieren mit $c_1 = 1, c_2 = 3$

(c) Double Hashing mit $h_1 = h'$ und $h_2(k) = (k \bmod 10) + 1$.

Beschreiben Sie insbesondere, welche Plätze bei (a) für 59 und bei (b) für 88 sondiert werden.

Aufgabe 20: Betrachten Sie eine Hashtabelle der Größe $m = 1000$ und die Hashfunktion $h(k) = \lceil m(kA \bmod 1)\rceil$ für $A = (\sqrt{5} - 1)/2$. Berechnen Sie die Hashwerte der Schlüssel 61, 62, 63, 64, 65.

Aufgabe 21: Löschen in offen adressierten Hash-Tabellen organisiert man wie folgt: Man ersetzt den Eintrag durch die Marke "wieder frei" (DELETED). Suche nach Elementen muß nun diese Marke überspringen, Einfügen kann man auch an solchen Stellen.

(a) Schreiben Sie Pseudo-Code für $\textsc{Delete}(A, i)$, um aus der Hash-Tabelle A den Eintrag an der Stelle i zu löschen. Modifizieren Sie entsprechend $\textsc{Insert}(A, k)$ und $\textsc{Search}(A, k)$.

(b) Die Hash-Tabelle habe die Größe m. n der Plätze seien besetzt und k wieder frei. Sei $n + k < m$. Wie lange dauert dann das Suchen nach einem nicht vorhandenen Element im Mittel? Nehmen Sie dazu die "uniform hashing"-Bedingung an.

(c) Es gebe nun $n = m/2$ besetzte und $k = 0$ wieder freie Plätze. Es werden $m/4$ Elemente entfernt und dann zufällige $m/4$ neue Elemente eingefügt. Wieviele wieder freie Plätze gibt es dann im Mittel?

(siehe zweite Seite)

(d) Seien m, n, k wie in Teilaufgabe (b). Nun werde ein Element entfernt und dann ein zufälliges Element eingefügt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es dann einen wieder freien Platz mehr als zuvor?

(e) Es gebe nun wieder $n = m/2$ besetzte und $k = 0$ wieder freie Plätze. Nun werde in jedem Durchgang ein Element entfernt und ein zufälliges Element eingefügt. Wieviele noch nie besetzte Plätze gibt es im Mittel nach i solcher Durchgänge?

(f) Nach wievielen Durchgängen in (e) gibt es im Mittel keine noch nie besetzten Plätze mehr? (Beachten Sie, daß immer nur die Hälfte besetzt ist.) Berechnen Sie diese Anzahl im Fall $m = 100$.

Aufgabe 22: Angenommen sei eine Hash-Tabelle mit $n \geq 3$ Plätzen, in die n zufällige Elemente eingetragen wurden, wobei Kollisionen mittels Verkettung aufgelöst worden seien. Wir gehen von einer uniformen Hashfunktion aus. M sei das Maximum der Längen aller Ketten in der Hash-Tabelle. Wir suchen eine obere Schranke für den Erwartungswert $E(M)$ von M.

(a) Wie gross ist die erwartete Anzahl an Kollisionen während des gesamten Einfügeprozesses?

(b) Q_k sei die Wahrscheinlichkeit, dass an einem bestimmten Platz eine Kette von genau k Elementen abgelegt wurde. Zeigen Sie, dass

$$Q_k = \binom{n}{k}(1/n)^k(1-1/n)^{n-k}.$$

(c) Sei P_k die Wahrscheinlichkeit, dass $M = k$, d. h., dass der Platz mit der längsten Kette genau k Elemente enthält. Zeigen Sie, dass $P_k \leq nQ_k$.

(d) Zeigen Sie, dass $Q_k \leq e^k/k^k$. Benutzen Sie dazu folgenden Teil der Stirling-Formel: $k! \geq \sqrt{2\pi k}\,(\frac{k}{e})^k$. (In der Stirling-Formel hat man $\sim$ anstatt $\geq$.)

(e) Beweisen Sie die Existenz einer Konstanten $c > 3$ mit $Q_k < 1/n^3$ für alle $k \geq c \ln n / \ln\ln n$. (ln ist der natürliche Logarithmus, $\ln\ln n = \ln(\ln n)$.)

(f) Zeigen Sie

$$E(M) \leq P\left[M > c\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right] \cdot n + P\left[M \leq c\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right] \cdot c\frac{\ln n}{\ln\ln n}.$$

Dabei sei $P[A]$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A. Folgern Sie daraus $E(M) = O(\log n/\log\log n)$.