

Übungen zur Vorlesung Informatik IV Musterlösungen

Aufgabe 18:

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Definiere $L^{suf} := \{w \in \Sigma^* \mid \forall u, v \in \Sigma^* : w = uv \Rightarrow v \in L\}$ als die Menge der Wörter, deren Suffixe alle in L sind.

- a) Seien $L_1 = L(\epsilon + b(a + b)^*)$ und $L_2 = L(b(a^*b)^*)$. Was sind L_1^{suf} und L_2^{suf} ?
- b) Zeigen Sie: Ist L regulär, dann ist auch L^{suf} regulär. *Hinweis:* Benutzen Sie die Tatsache, dass die Klasse der regulären Sprachen unter Komplementbildung abgeschlossen ist.

Lösung

(a) $L_1^{suf} = b^*$, $L_2^{suf} = \emptyset$

(b) Angenommen L ist regulär. Da die Klasse der regulären Sprachen abgeschlossen ist unter Komplementbildung, ist auch die Sprache $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$ regulär. D.h. es gibt einen DEA $\mathcal{A} = (Z, \Sigma, z_0, \delta, E)$, so dass $L(\mathcal{A}) = \bar{L}$.

Wir konstruieren nun einen nicht-deterministischen Automaten, der erkennt, ob ein Suffix eines vorgelegten Worts von $\mathcal{A}$ erkannt wird. Dazu verbleibt er beliebig lange in seinem Startzustand und wechselt irgendwann nicht-deterministisch in den Automaten $\mathcal{A}$. Formal ist $\mathcal{A}' = (Z \cup \{z'_0\}, \Sigma, \{z'_0\}, \delta', E)$ wobei $z'_0 \notin Z$ und

$$\begin{aligned} \delta'(z'_0, a) &= \{z'_0\} \cup \{z \mid z \in \delta(z_0, a)\} && \text{für alle } a \in \Sigma \\ \delta'(z, a) &= \{\delta(z, a)\} && \text{für alle } a \in \Sigma \text{ und alle } z \neq z'_0 \end{aligned}$$

Jetzt gilt

$$\begin{aligned} L(\mathcal{A}') &= \{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^*, w = uv \text{ und } v \in L(\mathcal{A})\} \\ &= \Sigma^* \setminus \{w \in \Sigma^* \mid \forall u, v \in \Sigma^* : w = uv \Rightarrow v \notin L(\mathcal{A})\} \\ &= \Sigma^* \setminus \{w \in \Sigma^* \mid \forall u, v \in \Sigma^* : w = uv \Rightarrow v \notin \bar{L}\} \\ &= \Sigma^* \setminus \{w \in \Sigma^* \mid \forall u, v \in \Sigma^* : w = uv \Rightarrow v \in L\} \\ &= \Sigma^* \setminus L^{suf} \end{aligned}$$

Also wird das Komplement von L^{suf} von einem NEA erkannt. Somit ist $\overline{L^{suf}}$ regulär. Da die Klasse der regulären Sprachen unter Komplementbildung abgeschlossen ist, ist auch $\overline{\overline{L^{suf}}} = L^{suf}$ regulär.

Ein Hinweis zur Effizienz dieses Verfahrens: Ist L gegeben durch einen NEA mit n Zuständen, dann liefert dieses Verfahren einen DEA für L^{suf} mit 2^{2^n+1} Zuständen. Wendet man dieses Verfahren auf die Sprache der Wörter, deren neunt-letzttes Symbol eine 0 ist, an, so erhält man einen DEA, der die leere Menge erkennt, aber mehr erreichbare Zustände hat, als es Elementarteilchen im Universum gibt.