

Übungen zur Vorlesung Informatik IV Musterlösungen

Aufgabe 22:

Sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine Typ-2-Grammatik, und $M \subseteq N$ die Menge aller Nichtterminalsymbole, aus denen sich mindestens ein Wort ableiten lässt, also $M = \{X \in N \mid \exists w \in \Sigma^* \text{ mit } X \Rightarrow^* w\}$.

Die Menge M lässt sich wie folgt berechnen. Zu Anfang setze $M' := \emptyset$. Solange, wie es noch ein Nichtterminalsymbol $X \in N \setminus M'$ und eine Regel $X \rightarrow v$ gibt, so dass v nur aus Terminalsymbolen und Nichtterminalsymbolen in M' besteht, setze $M' := M' \cup \{X\}$. Da es nur endlich viele Nichtterminale gibt, muss dieses Verfahren nach höchstens $|N|$ vielen Iterationen terminieren und eine Menge $M' \subseteq N$ liefern.

Im folgenden soll gezeigt werden, dass dieses Verfahren auch korrekt ist, also dass $M' = M$ gilt.

- Zeigen Sie dazu zuerst per Induktion über die Anzahl der Iterationsschritte dieses Verfahrens, dass für alle $X \in N$ gilt: wenn X im i -ten Iterationsschritt in M' enthalten ist, dann gilt auch $X \in M$.
- Zeigen Sie durch Induktion über die Tiefe eines Ableitungsbaums für w mit Wurzel X , dass gilt: Wenn $X \Rightarrow^* w$, dann wird X auch in einem Iterationsschritt zu M' hinzugefügt.
- Berechnen Sie mithilfe dieses Verfahrens die Menge M bzgl. der folgenden Grammatik:

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow aAa \mid bBb \mid aDb & C \rightarrow CDE \\ A \rightarrow CDA \mid a \mid D & D \rightarrow A \mid B \mid ab \\ B \rightarrow CDB \mid A & E \rightarrow CDC \end{array}$$

Geben Sie dazu in jedem Iterationsschritt diejenigen Nichtterminale an, die in diesem Schritt zu M' hinzugenommen werden. Geben Sie zu jedem auch den Grund an.

Lösung:

a) Wir zeigen $M' \subseteq M$ durch Induktion über die Anzahl der Iterationsschritte des oben beschriebenen Verfahrens. Sei $X \in M'$.

Induktionsanfang. X wird nur dann im 1. Iterationsschritt zu M' hinzugefügt, wenn es eine Regel $X \rightarrow w \in P$ gibt, so dass $w \in (\Sigma \cup \emptyset)^* = \Sigma^*$. Dann gilt aber auch $X \Rightarrow w$, also w ist aus X ableitbar, und somit gilt $X \in M$.

Induktionsschritt. Angenommen, X wird im i -ten Iterationsschritt ($i > 1$) zu M' hinzugefügt. Mit M'' bezeichnen wir für diesen Moment das M' , welches im $i - 1$ -ten Iterationsschritt entstanden ist. Nach Induktionsvoraussetzung gilt für alle $Y \in M''$: $Y \in M$. Nun wird X aber nur zu M' hinzugefügt, wenn es eine Regel $X \rightarrow w \in P$ gibt, so dass $w \in (\Sigma \cup M'')^*$. Da alle $Y \in M''$ zu mindestens einem Wort in Σ^* abgeleitet werden können, kann auch X zu einem Wort in Σ^* abgeleitet werden, und somit gilt auch hier $X \in M$.

b) Wir zeigen $M \subseteq M'$ durch Induktion über die Tiefe eines Ableitungsbaumes, oder – äquivalent dazu – die Länge einer Ableitung. Es gelte $X \in M$, also existiert ein $w \in \Sigma^*$ mit $X \Rightarrow^* w$.

Induktionsanfang. Hier hat der Ableitungsbaum Tiefe 1, besteht also nur aus der Wurzel X und den Blättern, die das Wort w bilden. Dies ist aber nur möglich, wenn die Regel $X \rightarrow w$ in P vorhanden ist. Dann gilt aber auch $X \in M'$, denn X wird im ersten Iterationsschritt zu M' hinzugefügt.

Induktionsschritt. Angenommen, der Ableitungsbaum für $X \Rightarrow^* w$ habe Tiefe > 1 . Dann existiert unter den Söhnen der Wurzel X mindestens ein Nichtterminalsymbol Y . Jedes solche Y ist Wurzel eines Teilbaums geringerer Tiefe. Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung, dass jedes solche Y irgendwann zu M' hinzugefügt wird. Dann wird aber auch X , spätestens einen Schritt nach dem letzten solcher Y s zu M' hinzugefügt.

c)

Iterationsschritt	M'	Gründe
0	$\emptyset$	
1	$\{A, D\}$	$A \rightarrow a, D \rightarrow ab$
2	$\{A, D, S\}$	$S \rightarrow aAa$
3	$\{A, D, S\}$	

Aufgabe 23:

Sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ die Typ-2-Grammatik aus der vorherigen Aufgabe. Ziel dieser Aufgabe ist es, G in Chomsky-Normalform umzuwandeln. Um sich etwas Arbeit zu sparen, können Sie aus G mithilfe der Aufgabe 22c) zuerst alle unnützen Nichtterminalsymbole eliminieren. Diese Aufgabe lässt sich jedoch auch ohne diesen Schritt lösen.

- Eliminieren Sie aus G mithilfe des Verfahrens aus der Vorlesung alle unproduktiven Regeln der Form $X \rightarrow Y$. Geben Sie dazu erst alle Paare von Nichtterminalsymbolen X und Y an, so dass $X \Rightarrow^* Y$. Geben Sie dann eine Typ-2-Grammatik G' an, so dass $L(G') = L(G)$ gilt, und G' keine unproduktiven Regeln mehr enthält.
- Wandeln Sie jetzt G' in eine Grammatik G'' um, so dass $L(G'') = L(G)$ gilt und G'' in Chomsky-Normalform ist.

Lösung:

Wir eliminieren zuerst die unproduktiven Symbole B, C, E (siehe Aufgabe 22c), und erhalten die folgende, äquivalente Grammatik.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aAa \mid aDb \\ A &\rightarrow a \mid D \\ D &\rightarrow A \mid ab \end{aligned}$$

a) offensichtlich gilt $A \Rightarrow^* D$ und $D \Rightarrow^* A$. Wir ersetzen A und D durch ein einziges Nichtterminalsymbol A .

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aAa \mid aAb \\ A &\rightarrow a \mid ab \end{aligned}$$

b) Es müssen keine Nichtterminalsymbole eliminiert werden. Die endgültige Umformung in Chomsky-Normalform ergibt:

$$S \rightarrow FH \mid FI$$

$$A \rightarrow a \mid ab$$

$$F \rightarrow a$$

$$H \rightarrow AF$$

$$I \rightarrow AG$$

$$G \rightarrow b$$