Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. M. Hofmann
Dr. M. Lange

SS 05

9.5.05

Übungen zur Vorlesung
Informatik IV

Blatt 5

Abgabe spätestens am 23.5.05, 14:00 Uhr

Aufgabe 19: **4 Punkte**

Seien A und B zwei formale Sprachen. Der Linksquotient von A und B ist folgendermaßen definiert: $A^{-1}B = \{w \in \Sigma^* \mid \exists v \in A \text{ mit } vw \in B\}$. Die Sprache $A^{-1}B$ besteht also aus den Wörtern, die man an ein Wort in A hängen kann, um ein Wort in B zu erhalten.

Zeigen Sie, dass $A^{-1}B$ eine reguläre Sprache ist, falls A und B jeweils regulär sind. Dazu können Sie davon ausgehen, dass A und B durch einen NEA, DEA, regulären Ausdruck oder eine Typ-3-Grammatik gegeben sind. Dann müssen Sie einen NEA, DEA, regulären Ausdruck oder eine Typ-3-Grammatik für $A^{-1}B$ angeben.

Erläutern Sie Ihre Konstruktion!

Aufgabe 20: **4 Punkte**

Geben Sie einen Algorithmus an, der zu zwei regulären Ausdrücken A und B entscheidet, ob es unendlich viele Wörter w gibt, die sowohl in $L(A)$ als auch in $L(B)$ liegen.

Aufgabe 21: **4 Punkte**

Sei $\Sigma = \{a, b\}$.

a) Geben Sie eine Typ-2-Grammatik mit höchstens 3 Regeln für die Sprache L^{pal} aller Palindrome über Σ an. Ein Palindrom ist ein Wort, welches sich vorwärts wie rückwärts gleich liest. Formal ist $L^{pal} := \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \Sigma^*\}$.

b) Eine ähnliche Sprache ist die Menge aller wiederholten Wörter L^{rep}. Sie ist folgendermaßen definiert: $L^{rep} := \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$. Beachten Sie, dass L^{rep} nicht dasselbe ist wie $\Sigma^*\Sigma^*$!

   Zeigen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas für kontext-freie Sprachen, dass L^{rep} nicht kontext-frei ist.

Aufgabe 22: **5 Punkte**

Sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine Typ-2-Grammatik, und $M \subseteq N$ die Menge aller Nichtterminalsymbole, aus denen sich mindestens ein Wort ableiten lässt, also $M = \{X \in N \mid \exists w \in \Sigma^* \text{ mit } X \Rightarrow^* w\}$.

Die Menge M lässt sich wie folgt berechnen. Zu Anfang setze $M' := \emptyset$. Solange, wie es noch ein Nichtterminalsymbol $X \in N \setminus M'$ und eine Regel $X \to v$ gibt, so dass v nur aus Terminalsymbolen und Nichtterminalsymbolen in M' besteht, setze $M' := M' \cup \{X\}$. Da es nur endlich viele Nichtterminale gibt, muss dieses Verfahren nach höchstens $|N|$ vielen Iterationen terminieren und eine Menge $M' \subseteq N$ liefern.

Im folgenden soll gezeigt werden, dass dieses Verfahren auch korrekt ist, also dass $M' = M$ gilt.

a) Zeigen Sie dazu zuerst per Induktion über die Anzahl der Iterationsschritte dieses Verfahrens, dass für alle alle $X \in N$ gilt: wenn X im i-ten Iterationsschritt in M' enthalten ist, dann gilt auch $X \in M$.

b) Zeigen Sie durch Induktion über die Tiefe eines Ableitungsbaums für w mit Wurzel X, dass gilt: Wenn $X \Rightarrow^* w$, dann wird X auch in einem Iterationsschritt zu M' hinzugefügt.

c) Berechnen Sie mithilfe dieses Verfahrens die Menge M bzgl. der folgenden Grammatik:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} S & \rightarrow & aAa \mid bBb \mid aDb & C & \rightarrow & CDE \\ A & \rightarrow & CDA \mid a \mid D & D & \rightarrow & A \mid B \mid ab \\ B & \rightarrow & CDB \mid A & E & \rightarrow & CDC \end{array}$$

Geben Sie dazu in jedem Iterationsschritt diejenigen Nichtterminale an, die in diesem Schritt zu M' hinzugenommen werden. Geben Sie zu jedem auch den Grund an.

Aufgabe 23: **6 Punkte**

Sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ die Typ-2-Grammatik aus der vorherigen Aufgabe. Ziel dieser Aufgabe ist es, G in Chomsky-Normalform umzuwandeln. Um sich etwas Arbeit zu sparen, können Sie aus G mithilfe der Aufgabe 22c) zuerst alle unnützen Nichterminalsymbole eliminieren. Diese Aufgabe lässt sich jedoch auch ohne diesen Schritt lösen.

a) Eliminieren Sie aus G mithilfe des Verfahrens aus der Vorlesung alle unproduktiven Regeln der Form $X \rightarrow Y$. Geben Sie dazu erst alle Paare von Nichtterminalsymbolen X und Y an, so dass $X \Rightarrow^* Y$. Geben Sie dann eine Typ-2-Grammatik G' an, so dass $L(G') = L(G)$ gilt, und G' keine unproduktiven Regeln mehr enthält.

b) Wandeln Sie jetzt G' in eine Grammatik G'' um, so dass $L(G'') = L(G)$ gilt und G'' in Chomsky-Normalform ist.

Aufgabe 24: **4 Punkte**

Sei G die folgende Typ-2-Grammatik in Chomsky-Normalform.

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & BC \mid CA \\ A & \rightarrow & BC \mid b \\ B & \rightarrow & CB \mid b \\ C & \rightarrow & AA \mid a \end{array}$$

Entscheiden Sie zu jedem der folgenden Wörter $w_1 = babab$ und $w_2 = abbab$ mithilfe des CYK-Algorithmus, ob sie zu $L(G)$ gehören oder nicht. Geben Sie dazu jeweils die entsprechende Tabelle an!

Aufgabe 25: **3 Punkte**

Zeigen Sie durch Induktion über die Länge eines Wortes w, dass für alle Typ-2-Grammatiken G in Chomsky-Normalform und alle Wörter w mit $|w| \geq 1$ gilt: Jeder Ableitungsbaum für w bzgl. G hat genau $2 \cdot |w| - 1$ Knoten, die mit einem Nichtterminalsymbol beschriftet sind.