Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. M. Hofmann
Dr. M. Lange

SS 05

23.5.05

Übungen zur Vorlesung
Informatik IV

Blatt 6

Abgabe spätestens am 30.5.05, 14:00 Uhr

Aufgabe 33: **2 Punkte**

Seien L_1 und L_2 zwei Sprachen mit jeweils unendlich vielen Wörtern über einem Alphabet mit mindestens 2 Symbolen. Betrachten Sie die folgenden Aussagen. Beide sind nicht richtig. Widerlegen Sie sie jeweils durch Angabe eines Gegenbeispiels. Begründen Sie auch, warum jeweils das L_2 aus Ihren Gegenbeispielen nicht kontext-frei ist (z.B. weil dies aus der Vorlesung bekannt ist).

a) Ist L_1 regulär und gilt $L_2 \subseteq L_1$, dann ist L_2 kontext-frei.

b) Ist L_1 regulär und gilt $L_1 \subseteq L_2$, dann ist L_2 kontext-frei.

Aufgabe 34: **3 Punkte**

Wandeln Sie die folgende Typ-2-Grammatik mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren in einen Kellerautomaten um.

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & b \mid bb \mid aAB \\ A & \rightarrow & aAA \mid Bb \\ B & \rightarrow & AaB \mid aa \end{array}$$

Aufgabe 35: **6 Punkte**

Konstruieren Sie jeweils einen Kellerautomaten für die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$, die Menge aller Wörter mit unterschiedlich häufigen Vorkommen der Buchstaben a und b.

b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists n, m, k \in \mathbb{N}$ so dass $n = m$ oder $n = k$, und $w = a^n b^m c^k\}$

Aufgabe 36: **4 Punkte**

In dieser Aufgabe betrachten wir eine Abschlusseigenschaft der Klasse der kontext-freien Sprachen.

a) Zeigen Sie, dass die kontext-freien Sprachen unter Durchschnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen sind. Sei also L_1 eine kontext-freie Sprache und L_2 eine reguläre Sprache. Konstruieren Sie eine Typ-2-Grammatik oder einen Kellerautomaten für die Sprache $L_1 \cap L_2$.

b) Ein endliches Alphabet Σ lässt sich immer in einer willkürlichen Weise total ordnen, z.B. $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ mit $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Ein Wort $w \in \Sigma^*$ ist dann *geordnet*, falls die Buchstaben in dem Wort von links nach rechts nicht "kleiner" werden. D.h. $w = b_1 \ldots b_m$ is geordnet, falls für alle $i < m$ gilt: $b_i \leq b_{i+1}$.

   Zu einer Sprache L definieren wir $L^<$ als die Menge aller geordneten Wörter in L. Zeigen Sie, dass folgendes gilt: Ist L kontext-frei, dann ist auch $L^<$ kontext-frei.

Aufgabe 37: **5 Punkte**

In dieser Aufgabe betrachten wir Wege in einer nach oben und unten beschränkten, nach rechts und links unendlichen Ebene. Diese wird modelliert durch ganzzahlige Koordinatenpaare: $E_{t,h} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, t \leq y \leq h\}$. Wir gehen davon aus, dass $t \leq 0 \leq h$ gilt, also dass der Ursprungspunkt $(0, 0)$ immer in diesen Ebenen enthalten ist.

Ein endlicher Weg in dieser Ebene startet in einem Punkt und führt von dort in jedem Schritt zu einem jeweiligen Nachbarfeld. Solche Wege können eindeutig (bis auf den Startpunkt) durch Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{o, u, r, l\}$ beschrieben werden. Die Bedeutung der Symbole soll dabei die folgende sein: ein Schritt nach *oben*, *unten*, *rechts*, bzw. *links*.

Bsp.: Der Weg $(0, 0), (1, 0), (1, -1), (1, -2), (0, -2), (-1, -2), (-1, -1)$ wird beschrieben durch das Wort $ruullo$. Er existiert z.B. in der Ebene $E_{-2,0}$, aber nicht in der Ebene $E_{-1,1}$.

a) Konstruieren Sie einen Kellerautomaten in Abhängigkeit von h und t, der genau die Wörter erkennt, welche einen Weg in der Ebene $E_{t,h}$ beschreiben, der im Ursprungspunkt $(0, 0)$ startet und endet.

b) Ist auch die Menge aller Wege, die mindestens einen Punkt in der Ebene zweimal durchlaufen, eine kontext-freie Sprache? Begründen Sie Ihre Antwort!