

## Übungen zur Vorlesung Informatik IV

Blatt 8

Abgabe spätestens am 13.6.05, 14:00 Uhr

### Aufgabe 43:

5 Punkte

In einer vorherigen Aufgabe wurde gezeigt, dass die Sprache  $L^{pal} = \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \Sigma^*\}$  von einem PDA, die Sprache  $\{ww \mid w \in \Sigma^*\}$  aber nicht von einem PDA erkannt wird. Außerdem kann  $L^{pal}$  nicht von einem DPDA erkannt werden. Markiert man jedoch die Mitte eines Wortes, dann ist dies möglich. D.h.  $\{w\$ \overleftarrow{w} \mid w \in \Sigma^*\}$  kann von einem DPDA erkannt werden, falls  $\$ \notin \Sigma$ .

In dieser Aufgabe betrachten wir in ähnlicher Weise die Sprache aller wiederholten Wörter. Zur Vereinfachung nehmen wir jedoch an, dass diese nicht leer sind. Sei also im folgenden  $L^{rep} = \{w \mid \exists v \in \Sigma^+ \text{ mit } w = vv\}$ .

- Geben Sie einen LBA  $\mathcal{A}_1$  an, der  $L^{rep}$  erkennt. *Hinweis:* Lassen Sie Ihr  $\mathcal{A}_1$  zu Anfang den Beginn des zweiten Vorkommens von  $v$  "raten", indem  $\mathcal{A}_1$  dessen erstes Symbol markiert. Lassen Sie ihn dann schrittweise verifizieren, dass das Wort vor der Markierung und danach dasselbe ist.
- Geben Sie jetzt einen deterministischen LBA  $\mathcal{A}_2$  an, der  $L^{rep}$  erkennt. Sie können dazu  $\mathcal{A}_1$  so weit wie möglich wiederverwenden, um sich Schreibarbeit zu sparen.

### Aufgabe 44:

5 Punkte

In dieser Aufgabe betrachten wir den Abschluss der Typ-0- und Typ-1-Sprachen unter Durchschnitt.

- Erläutern Sie, warum die Typ-0-Sprachen unter Durchschnitt abgeschlossen sind. Sie müssen dies weder formal beweisen, noch zu zwei Turing-Maschinen  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  eine Turing-Maschine  $\mathcal{A}$  mit  $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$  formal angeben. Erklären Sie lediglich in Worten, wie  $\mathcal{A}$  arbeiten würde. Achten Sie dabei darauf, dass Sie in Ihrer Erklärung nur solche Aktionen beschreiben, die offensichtlich von einer Turing-Maschine ausgeführt werden können, z.B. "nach rechts bis zum vierten Vorkommen des Symbols  $a$  laufen", etc.
- Zeigen Sie jetzt formal, dass die Klasse der Typ-1-Sprachen ebenfalls unter Durchschnitt abgeschlossen ist. Sie können sich aussuchen, ob sie dies lieber über Typ-1-Grammatiken oder über LBAs zeigen. Geben Sie also zu je zwei LBAs oder Typ-1-Grammatiken einen LBA oder eine Typ-1-Grammatik an, der/die den Durchschnitt der beiden entsprechenden Sprachen erkennt/erzeugt.

*Hinweis:* Um ein Aufblähen der Satzform oder des Wortes auf dem Arbeitsband während der Berechnung zu vermeiden, benutzen Sie eine genügend grosse Menge von Nichtterminal- bzw. Bandsymbolen. Ein guter Kandidat für die neuen Symbole sind Paare von alten Symbolen.

**Aufgabe 45:****4 Punkte**

In dieser Aufgabe betrachten wir Turing-Maschinen ohne die Restriktion, dass zu jedem Zeitpunkt auf dem Arbeitsband nur ein endlich großer Teil nicht mit dem Blank-Symbol  $\square$  beschriftet ist. Zu Beginn ist also das in zwei Richtungen unendliche Arbeitsband überall mit beliebigen Symbolen beschrieben. Dadurch hat das Blank-Symbol natürlich keine besondere Bedeutung mehr. Solch eine Turing-Maschine ist also nur noch ein Tupel  $\mathcal{A} = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, E)$ , mit den Zuständen  $Z$ , dem Eingabe- bzw. Arbeitsalphabet  $\Sigma$  und  $\Gamma$ , der Transitionsrelation  $\delta : Z \times (\Sigma \cup \Gamma) \times Z \times \Gamma \times \{L, N, R\}$ , dem Anfangszustand  $z_0$  und den Endzuständen  $E \subseteq Z$ .

- Wir gehen davon aus, dass  $\Gamma$  aus dem Symbol  $a$  und mindestens noch einem weiteren Symbol besteht. Konstruieren Sie solch eine Turing-Maschine  $\mathcal{A}$ , die letztendlich in einen Endzustand übergeht, wenn irgendwo auf dem Arbeitsband mindestens einmal das Symbol  $a$  vorkommt.
- Kann man sagen, dass  $\mathcal{A}$  entscheidet, ob irgendwo ein  $a$  vorkommt *oder nicht*? Begründen Sie Ihre Antwort!

**Aufgabe 46:****6 Punkte**

Geben Sie jeweils an, ob die folgenden Funktionen intuitiv berechenbar oder intuitiv nicht berechenbar sind, bzw. ob man dies nach jetzigem Stand des Wissens nicht sagen kann. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung!

- $f : \{0, \dots, 9\}^+ \rightarrow \{\text{JA}, \text{NEIN}\}$ , wobei

$$f(w) = \begin{cases} \text{JA}, & \text{falls das Wort } w \text{ in der Dezimaldarstellung von } \pi \text{ an der Stelle } w \\ & \text{(als Dezimalzahl gelesen) beginnt} \\ \text{NEIN}, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $f : \{0, \dots, 9\}^+ \rightarrow \{\text{JA}, \text{NEIN}\}$ , wobei

$$f(w) = \begin{cases} \text{JA}, & \text{falls es ein Wort } v \text{ gibt, so dass } v \geq w \text{ (als natürliche Zahlen)} \\ & \text{und } v \text{ in der Dezimaldarstellung von } \pi \text{ an der Stelle } v \text{ beginnt} \\ \text{NEIN}, & \text{sonst} \end{cases}$$

- $f : \{0, 1\}^+ \rightarrow \{0, 1\}^+$ ;  $f(w)$  ist die Binärdarstellung von  $2^{2^{\dots^2}}$ , so dass die Höhe des Turms die Zahl ist, die binär durch  $w$  kodiert ist

- $f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$ , wobei

$$\begin{aligned} f(\epsilon) &= f(b) \\ f(aw) &= af(w) \\ f(bw) &= f(f(w)af(w)) \end{aligned}$$

- $f : \text{ASCII}^* \rightarrow \{\text{JA}, \text{NEIN}\}$ , wobei

$$f(w) = \begin{cases} \text{JA}, & \text{falls die Partei } w \text{ nach der kommenden} \\ & \text{Bundestagswahl an der Regierung beteiligt ist} \\ \text{NEIN}, & \text{falls } w \text{ dann in der Opposition ist} \\ \perp, & \text{falls } w \text{ keine Partie ist} \end{cases}$$

- $f : \Delta^* \rightarrow \{0, 1\}$ , wobei  $\Delta$  genügend Symbole enthält, um eine Turing-Maschine über einem Alphabet  $\Sigma$  zu beschreiben, und

$$f(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls die Funktion, die die Turing-Maschine } w \text{ berechnet, total ist} \\ 0, & \text{falls sie nicht total ist} \\ \perp, & \text{falls } w \text{ keine Turing-Maschine beschreibt} \end{cases}$$