Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. M. Hofmann
Dr. M. Lange

SS 05

13.5.05

Übungen zur Vorlesung
Informatik IV

Zusatz-Übungsblatt
Abgabe spätestens am 23.5.05, 14:00 Uhr

Dieses Übungsblatt besteht nur aus Bonusaufgaben. Die Punkte aus der Bearbeitung dieser Aufgaben können zur Erreichung der 50%-Grenze gezählt werden, sie zählen jedoch nicht zu den insgesamt zu erreichenden Punkten.

Jede Aufgabe enthält eine (mehr oder weniger offensichtlich) falsche Aussage und einen "Beweis" für diese Aussage. Es gibt einen Punkt pro Aufgabe. Den Punkt erhalten Sie, wenn Sie knapp und präzise angeben, wo (überall) der jeweilige "Beweis" scheitert.

Aufgabe 26:
Blödsinn: *Das längste Wort in Σ^* ist ϵ.*

Beweis. Wir beweisen dies durch Widerspruch. Angenommen, ϵ ist nicht das längste Wort in Σ^*. Dann gibt es ein anderes Wort $w \in \Sigma^*$ mit $w \neq \epsilon$, so dass w längstes Wort in Σ^* ist. Da $w \neq \epsilon$, gilt aber $|ww| > |w|$, d.h. w ist nicht längstes Wort, denn es gibt noch ein längeres. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme. Also muss ϵ längstes Wort in w sein. $\square$

Aufgabe 27:
Blödsinn: *Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Jedes Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w| > 0$ besteht nur aus a's oder nur aus b's.*

Beweis durch Induktion über die Wortlänge. Induktionsanfang: Wegen $|w| = 1$ gilt $w = a$ oder $w = b$. Offensichtlich gilt hier die Aussage.

Induktionsschritt. Sei $|w| = n+1$. Dann existieren $u, v \in \Sigma^*$, $x, y \in \Sigma$, so dass $w = xu$ und $w = vy$, denn w hat ein erstes und ein letztes Symbol. Da $|u| = |v| = n$, können wir die Induktionshypothese sowohl für u als auch für v anwenden, also sowohl u als auch v bestehen nur aus a's oder nur aus b's. Wegen der Überschneidung in der Mitte ($xu = vy$!) müssen u und v aus demselben Symbol bestehen, z.B. a (für b analog). Aber da y Teil von u ist und x Teil von v ist, besteht ganz w nur aus demselben Symbol.

Aufgabe 28:
Blödsinn: *Jede Sprache ist regulär.*

Beweis. Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache. Falls $L = \emptyset$, dann ist L offensichtlich regulär, denn L wird von dem NEA mit nur einem Zustand, ohne Transitionen und ohne Endzustand erkannt. Sei also $L \neq \emptyset$. Dann existiert mindestens ein $w \in L$. Also $L = \{w\} \cup L'$ für ein $L' \subseteq \Sigma^*$, so dass $w \notin L'$. Somit gilt $L' \subsetneq L$ und $|L'| < |L|$. Nach Induktionsvoraussetzung ist L' regulär. Außerdem ist die Sprache $\{w\}$ regulär, denn man kann leicht einen NEA angeben, der nur das eine Wort w erkennt. Aber die regulären Sprachen sind unter Vereinigung abgeschlossen, also ist auch L regulär. $\square$

Aufgabe 29:
Blödsinn: *Jede Sprache besteht nur aus dem leeren Wort.*

Beweis. Notation: Für eine beliebige Sprache A bezeichne $\overline{A}$ das Komplement von A, also $\overline{A} = \Sigma^* \setminus A$. Außerdem bezeichne A^+ ähnlich zu A^* die beliebig häufige, aber mindestens einmalige Komposition von A mit sich selbst, also $AA^* = A^+$. Daraus folgt natürlich $\{\epsilon\} = A^* \setminus A^+$.

$$A = \{\epsilon\}A\{\epsilon\} = \overline{\overline{\{\epsilon\}A\{\epsilon\}}} = \overline{(\Sigma^* \setminus \{\epsilon\})\overline{A\{\epsilon\}}} = \overline{\Sigma^+\overline{AA^* \setminus A^+}} = \overline{\Sigma^+\overline{\emptyset}} = \overline{\Sigma^+\Sigma^*} = \overline{\Sigma^+} = \{\epsilon\}$$

□

Aufgabe 30:
Blödsinn: *Die Gleichung $X = AX$ hat immer die Lösung A^*.*

Beweis: Es gilt $X = AX = AAX = AAAX = \ldots = A^*$. □

Aufgabe 31:
Blödsinn: *Die Sprache $(aa)^*$ ist nicht regulär.*

Beweis. Angenommen $(aa)^*$ ist regulär. Nach dem Pumping-Lemma existiert dann eine Zahl n. Sei n' gerade und $n' \geq n$. Betrachte das Wort $z = a^{n'}$. Offensichtlich gilt $z \in (aa)^*$. Betrachte jetzt die Zerlegung $z = uvw$ mit $u = \epsilon$, $v = a$ und $w = a^{n'-1}$. Offensichtlich gilt (1) $|uv| \leq n$ und (2) $|v| \geq 1$. Betrachte aber das Wort $uv^0w = a^{n'-1}$. Nach dem Pumping-Lemma müsste gelten: $uv^0w \in L$. Das ist aber nicht der Fall, denn $n' - 1$ ist ungerade. Also kann L nicht regulär sein.

Aufgabe 32:
Zu einem NEA $\mathcal{A}$ mit n Zuständen über einem Alphabet Σ lässt sich in Zeit $O(n)$ bestimmen, ob $L(\mathcal{A}) = \emptyset$ gilt oder nicht. Dies ist genau dann der Fall, wenn es einen Pfad von einem Anfangszustand zu einem Endzustand gibt.

Blödsinn: *Zu einem NEA mit n Zuständen über einem Alphabet Σ lässt sich in Zeit $O(n)$ bestimmen, ob $L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$ gilt oder nicht.*

Beweis: $L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$ gdw. $\overline{L(\mathcal{A})} = \emptyset$. Man kann in Zeit $O(n)$ alle Endzustände und Nicht-Endzustände in $\mathcal{A}$ vertauschen. Dann kann man – wie oben beschrieben – in Zeit $O(n)$ entscheiden, ob es in diesem Automaten einen Pfad von einem Anfangs- zu einem Endzustand gibt. Das ist in $\mathcal{A}$ ein Pfad von einem Anfangs- zu einem Nicht-Endzustand. Die Beschriftung entlang dieses Pfades ist ein Wort $w \in \Sigma^*$. Aber es gilt $w \notin L(\mathcal{A})$, weil der Pfad in einem Nicht-Endzustand endet. Somit ist in Zeit $O(n) + O(n) = O(n)$ entschieden, ob $L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$ gilt. □