Institut für Informatik SS 2007
der Universität München
Prof. M. Hofmann
Dipl. Inf. Hermann Gruber 20. April 2007

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen

Blatt 1

Mit P-XX gekennzeichnete Aufgaben bezeichnen Präsenzaufgaben, die in der Übung behandelt werden, mit H-XX gekennzeichnete Aufgaben sind Hausaufgaben.

Aufgabe P-1: Beschreiben Sie einen Algorithmus zur binären Suche in einem sortierten Array in Pseudocode, und führen Sie eine detaillierte Analyse von dessen Laufzeit mit Hilfe der *Master*-Methode durch.

Aufgabe P-2: Zeigen oder widerlegen Sie: Die Funktion $f(n) = \lceil \log n \rceil!$ hat

- höchstens polynomielles Wachstum, d.h. $f(n) = n^{O(1)}$.
- mindestens exponentielles Wachstum, d.h. $f(n) = 2^{\Omega(n)}$.

(Hier und im Laufe der Übung bezeichnet $\log(k)$ immer den Logarithmus von k zur Basis 2.) Wie sieht es mit der Funktion $\lceil(\log \log n)\rceil!$ aus?

Aufgabe H-1: Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen (für asymptotisch nichtnegative Funktionen):

- $f(n) + g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n)))$
- Wenn $f(n) = O(g(n))$ ist, so auch $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.
- $f(n) = \Theta(f(\frac{n}{3}))$
- $(f(n) + g(n))^2 = O(f(n)^2) + O(g(n)^2)$

(4 Punkte)

Aufgabe H-2: Führen Sie eine detaillierte worst-case und best-case Analyse des folgenden Algorithmus durch, analog zur Analyse von Insertion sort, die in der Vorlesung gegeben wurde. Geben Sie ein explizites best-case und-worst-case scenario an. (4 Punkte)

Algorithm 1 Maximum search

```
function maximum(array a[1,..., n])
max = a[1];
for i=2 to n do
   if (a[i] > max) then
      max = a[i]
   end if
end for
return max
```

Aufgabe H-3: Bestimmen Sie das asymptotische Wachstum der Lösungen $T(n)$ der folgenden Rekursionsgleichungen mit der *Master*-Methode, wo dies möglich ist:

- $T(n) = 3\,T(\frac{3n}{4}) + (n^2 + n)^2$
- $T(n) = 2\,T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n \log n}$
- $T(n) = \sqrt{32}\,T(\frac{n}{2}) + \sqrt{n^5} + n^2$
- $T(n) = T(n-1) + n$

(8 Punkte)

Aufgabe H-4: Die Relation $\bowtie$ ist auf der Menge der asymptotisch nichtnegativen Funktionen definiert:

$$f(n) \bowtie g(n) \text{ genau dann wenn } f(n) \in \Theta(g(n)).$$

Beweisen Sie, dass die Relation $\bowtie$ eine Äquivalenzrelation ist, d.h. eine symmetrische, transitive und reflexive Relation. (4 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 27. April, 11 Uhr in einer der Vorlesungen oder im dafür vorgesehenen Briefkasten in der Theresienstraße. Bearbeitung entweder alleine oder bevorzugt in Gruppen von zwei Personen (nicht mehr!). Abgeschriebene Lösungen werden mit 0 Punkten bewertet. Dazu zählen auch Lösungen aus dem Internet oder anderen Quellen. Alle Blätter müssen geheftet sein (z.B. in Schnellhefter), und nicht gefaltet.