

## Übungen zur Vorlesung Effiziente Algorithmen

Blatt 10

**Aufgabe H-35:** Es seien die Elemente  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L$  gegeben.

- a) Führen Sie für jedes dieser Elemente die Operation `MAKE-SET` aus, gefolgt von nachstehender Folge von `UNION`-Operationen. Setzen Sie hierfür Vereinigung nach dem Rang und Pfadverkürzung ein. Dokumentieren Sie die Schritte geeignet, und zeichnen Sie den am Ende entstandenen Wald, inklusive der Ränge der einzelnen Elemente.

`UNION(K,C)`

`UNION(F,D)`

`UNION(D,C)`

`UNION(C,G)`

`UNION(A,B)`

`UNION(E,H)`

`UNION(I,J)`

`UNION(J,A)`

`UNION(H,F)`

`UNION(H,B)`

`UNION(A,L)`

- b) Berechnen Sie das Gesamtpotenzial des momentanen Waldes vor und nach jeder Pfadverkürzung gemäß der Potenzialfunktion aus der Vorlesung.

(4 Punkte)

**Aufgabe H-36:** Zeigen Sie, dass eine Folge von  $m$  `MAKE-SET`-, `UNION`- und `FIND-SET`-Operationen, von denen  $n$  `MAKE-SET` sind, für Wälder mit Rangfunktion bereits eine Laufzeit von  $O(m \log n)$  hat, auch wenn keine weiteren Verbesserungen, wie z.B. Pfadkompression, eingesetzt werden. (4 Punkte)

**Aufgabe H-37:** Zeigen Sie mit Hilfe der Bänker-Methode, dass man die Gesamtlaufzeit von  $n$ -fachem `HEAP-INSERT` auf  $O(n \log n)$  und die Gesamtlaufzeit für eine unmittelbar daran anschließende Folge von  $m$ -fachem `HEAP-EXTRACT-MAX` auf  $O(m)$  setzen kann.

(4 Punkte)

**Aufgabe H-38:** Eine Sammlung von  $n = \sum_{i=0}^k a_i 2^i$  Elementen ( $a_i \in \{0, 1\}$ ) kann dargestellt werden als Folge  $A_0, \dots, A_{k-1}$  von sortierten Arrays, wobei  $A_i$  die Länge  $2^i$  hat und vollbesetzt ist, falls  $a_i = 1$ , und völlig leer, falls  $a_i = 0$ . (Die Arrays sind zwar jedes für sich sortiert, stehen aber untereinander in keiner Ordnungsbeziehung.)

- a) Beschreiben Sie eine möglichst effiziente Suchfunktion für obige Struktur, basierend auf binärer Suche. Bestimmen Sie die Laufzeit im schlechtesten Fall.
- b) Beschreiben Sie eine Einfügeoperation und bestimmen Sie die Laufzeit im schlechtesten Fall und eine möglichst gute asymptotische obere Schranke für die Gesamtlaufzeit von  $m$  aufeinanderfolgenden Einfügeoperationen.
- c) Skizzieren Sie eine möglichst effiziente Löschoption.

(8 Punkte)

**Abgabe bis Dienstag, 10. Juli, 09.00 Uhr** im dafür vorgesehenen Briefkasten in der Resi-39.