Institut für Informatik
der Universität München
Prof. M. Hofmann
Dipl. Inf. Hermann Gruber

SS 2007

3. Mai 2007

Übungen zur Vorlesung
Effiziente Algorithmen

Blatt 1

Aufgabe H-4: Die Relation $\bowtie$ ist auf der Menge der asymptotisch nichtnegativen Funktionen definiert:

$$f(n) \bowtie g(n) \text{ genau dann wenn } f(n) \in \Theta(g(n)).$$

Beweisen Sie, dass die Relation $\bowtie$ eine Äquivalenzrelation ist, d.h. eine symmetrische, transitive und reflexive Relation.

Lösung H-4: Transitivität: $f(n) = \Theta(g(n)) \wedge g(n) \in \Theta(h(n))$ impliziert, dass es Konstanten $c_1, c_2, c_3, c_4, n_0, m_0$ gibt, so dass für alle $n > \max(m_0, n_0)$ gilt:

$$\begin{aligned} c_1 g(n) \leq &\quad f(n) \quad \leq c_2 g(n) \\ c_3 h(n) \leq &\quad g(n) \quad \leq c_4 h(n) \end{aligned}$$

Damit gilt für alle $n > \max(m_0, n_0)$:

$$c_1 c_3 h(n) \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \leq c_2 c_4 h(n),$$

und $f(n) = \Theta(h(n))$.

Reflexivität: klar. Wähle die Konstanten als $c_1 = c_2 = n_0 = 1$.

Symmetrie: Sei $f(n) = \Theta(g(n))$. Def. besagt, dass für großes n:

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n).$$

Die linke Ungleichung umgestellt ergibt $g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n)$, die rechte Ungleichung lässt sich umformen zu $\frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n)$, und dies entspricht der Definition von $g(n) \in \Theta(f(n))$.