

Übung zur Vorlesung Multiagentensysteme

Tutorübung: 11. Juli 2007 Abgabetermin Hausaufgaben: 18. Juli 2007

Aufgabe 1 (Erst- und Zweitpreisauktionen) (T)

Betrachten Sie Auktionen mit *vollständiger Information*, d.h. die Bewertungen der Bieter seien allgemein bekannt.

- Zeigen Sie, dass in jedem Gleichgewicht einer Erstpreisauktion derjenige Bieter den Gegenstand bekommt, der ihn am höchsten schätzt.
- Zeigen Sie, dass es in einer Zweitpreisauktion ein Gleichgewicht geben kann, in dem der Bieter mit der höchsten Bewertung den Gegenstand nicht bekommt.
- Zeigen Sie, dass es in einer Zweitpreisauktion ein Gleichgewicht geben kann, in dem der Bieter mit der niedrigsten Bewertung den Gegenstand bekommt.

Aufgabe 2 (Drittpreisauktion) (H)

Betrachten Sie eine Drittpreisauktion im Modell mit vollständiger Information, in der der Bieter mit dem höchsten Gebot den Gegenstand zum Preis des dritthöchsten Gebotes bekommt. Nehmen Sie an, dass es mindestens drei Bieter gibt, v_i bezeichne die tatsächliche Bewertung von Bieter i .

- Zeigen Sie, dass für jeden Bieter i das Gebot v_i alle niedrigeren Gebote schwach dominiert, dass dies aber nicht der Fall ist für alle höheren Gebote.
- Zeigen Sie, dass (v_1, \dots, v_n) kein Nash-Gleichgewicht ist.
- Geben Sie ein Nash-Gleichgewicht der Drittpreisauktion an.

Aufgabe 3 (Ertragsäquivalenzsatz) (T)

- Beweisen Sie den Ertragsäquivalenzsatz.
- Betrachten Sie den Fall, in dem ein Gegenstand zwischen zwei Bietern versteigert wird. Nehmen Sie an, dass die privaten Bewertungen unabhängig gleichverteilt sind. Für welche tatsächlichen Bewertungen v_1 und v_2 ergibt die Erstpreisauktion einen höheren Ertrag als die Zweitpreisauktion? Interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf den Ertragsäquivalenzsatz.

Aufgabe 4 (Nachfrage nach einer Einheit) (H)

Betrachten Sie eine Auktion identischer Einheiten im IPV Modell, bei der jeder Bieter Nachfrage nach nur einer Einheit hat.

- (a) Beschreiben Sie eine Auktion, die den VCG-Mechanismus umsetzt.
- (b) Betrachten Sie eine Situation mit vier Bieter und den Bewertungen $v_1 = 25$, $v_2 = 20$, $v_3 = 15$ und $v_4 = 8$ für jeweils eine Einheit. Berechnen Sie die Einnahmen des Auktionators für den Fall, dass er eine, zwei, drei bzw. vier Einheiten anbietet. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Betrachten Sie nun eine Situation mit *unbeschränktem Angebot*, d.h. es stehe eine unbeschränkte Anzahl an Einheiten zur Verfügung. Der *optimale Festpreis* ist dann gegeben durch \hat{v}_{opt} , wobei \hat{v}_i das *i*-höchste Gebot bezeichne und $opt \in \operatorname{argmax}_{i \in N} i \cdot \hat{v}_i$.

- (c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass eine Auktion, in der ein Bieter eine Einheit zum optimalen Festpreis bekommt, wenn seine Bewertung mindestens dem Festpreis entspricht, strategiesicher ist.

Betrachten Sie schließlich die folgende randomisierte Auktion. Die Bietermenge N werde zufällig in zwei Mengen N_1 und N_2 partitioniert (jedem Bieter werde dabei mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ eine der beiden Mengen zugewiesen), p_j bezeichne den optimalen Festpreis für die Menge N_j , $j \in \{1, 2\}$. Bieter $i \in N_j$ bekommt dann eine Einheit zum Preis p_{3-j} , wenn $\hat{v}_i \geq p_{3-j}$.

- (d) Untersuchen Sie, ob diese Auktion strategiesicher, effizient, schwach budgetausgeglichen und (ex-post) individuell rational ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (Kombinatorische Auktionen) (H)

In kombinatorischen Auktionen werden mehrere Waren gleichzeitig versteigert, und Bieter können Gebote für beliebige Kombinationen der Waren abgeben. Das *Bündeln* von Waren bezeichnet den Vorgang, dass bestimmte Waren *ausschließlich* in Kombination mit anderen angeboten werden. Zwei Mengen S und T von Waren heißen *komplementär*, wenn ihr kombinierter Wert größer ist als die Summe ihrer individuellen Werte, d.h. $v_i(S \cup T) > v_i(S) + v_i(T)$ für alle $i \in N$, und *substitutiv*, wenn der kombinierte Wert geringer ist als die Summe der individuellen Werte, d.h. $v_i(S \cup T) < v_i(S) + v_i(T)$ für alle $i \in N$.

Betrachten Sie nun eine Situation, in der zwei Waren A und B versteigert werden unter drei Bieter 1, 2 und 3. Die folgende Tabelle stelle die Bewertung v_i der Bieter für Kombinationen der Waren dar:

Bieter	A	B	{A, B}
1	8	4	14
2	4	7	12
3	7	1	10

- (a) Sind A und B komplementär oder substitutiv?
- (b) Bestimmen Sie die optimale Verteilung, die zugehörigen VCG-Preise und den Ertrag für den Fall, dass der Auktionator die Waren *nicht* bündeln kann.
- (c) Bestimmen Sie nun die optimale Verteilung, die zugehörigen VCG-Preise und den Ertrag für den Fall, wenn bündeln möglich ist. Diskutieren Sie das Ergebnis.