

Übung zur Vorlesung Multiagentensysteme

Tutorübung: 2. Mai 2007 Abgabetermin Hausaufgaben: 9. Mai 2007

Aufgabe 1 („Stein, Schere, Papier“)

Betrachten Sie das bekannte Spiel „Stein, Schere, Papier“.

- (a) Modellieren Sie „Stein, Schere, Papier“ als Spiel in Normalform. **(H)**
- (b) Modellieren Sie nun die häufig anzutreffende Variante, bei der das Spiel um ein Symbol „Brunnen“ erweitert ist. „Brunnen“ schlägt „Schere“ und „Stein“ und verliert gegen „Papier“. **(H)**
- (c) Existieren in einer der beiden Varianten schwach dominierte Aktionen? **(H)**
- (d) Bestimmen Sie den security level beider Spieler in beiden Varianten des Spiels. **(H)**

Aufgabe 2 (Dominanz und Pareto Dominanz)

Sei G ein Spiel mit höchstens drei unterschiedlichen Auszahlungsprofilen.

- (a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass es in G kein Pareto dominiertes Profil von stark dominanten Strategien geben kann. **(T)**
- (b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass es in G kein Pareto dominiertes Strategieprofil geben kann, das gleichzeitig die Lösung mittels iterierter Eliminierung stark dominierter Strategien darstellt. **(T)**
- (c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass es in G kein Pareto dominiertes Strategieprofil geben kann, das gleichzeitig die Lösung mittels iterierter Eliminierung schwach dominierter Strategien darstellt. **(T)**

Aufgabe 3 (Iterierte Eliminierung dominierter Strategien)

Betrachten Sie folgendes Spiel:

	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>R</i>
<i>T</i>	2, 2	0, 2	0, 1
<i>M</i>	2, 0	1, 1	0, 2
<i>B</i>	1, 0	2, 0	0, 1

- (a) Zeigen Sie, dass dieses Spiel lösbar ist durch iterierte Eliminierung schwach dominierter Aktionen. (T)
- (b) Finden Sie eine Sequenz von Eliminierungen schwach dominierter Aktionen, die mindestens zwei Ergebnisse zurücklässt, so dass keine weiteren Aktionen schwach dominiert sind. (T)

Betrachten Sie das folgende Spiel mit drei Spielern. Zwei Spieler wählen wie bisher Zeilen und Spalten, der dritte Spieler wählt nun die linke oder die rechte Matrix.

5, 3, 0	1, 2, 7	4, 2, 1
1, 0, 1	6, 4, 1	2, 5, 0
1, 5, 2	4, 0, 7	3, 1, 8

2, 2, 1	3, 4, 4	2, 7, 2
1, 1, 3	6, 3, 0	4, 3, 0
1, 0, 2	4, 1, 9	3, 2, 1

- (c) Zeigen Sie, dass dieses Spiel lösbar ist durch iterierte schwache Dominanz. (H)
- (d) Ist dieses Spiel auch lösbar durch iterierte starke Dominanz? (H)

Aufgabe 4 (Binäre Spiele)

Ein Spiel heißt *binär*, wenn der Nutzen jedes Auszahlungsprofils für jeden Spieler jeweils entweder 0 oder 1 ist, d.h. $u_i(a) \in \{0, 1\}$ für jeden Spieler i und jedes Ergebnis a . Im Folgenden sei G ein binäres Spiel, in dem jeder Spieler mindestens zwei Aktionen besitzt.

- (a) Zeigen Sie, dass jede von einer gemischten Strategie schwach dominierte Aktion auch von einer reinen Strategie schwach dominiert wird. (T)
- (b) Zeigen Sie, dass die Lösbarkeit jedes binären Spiels mit zwei Spielern und höchstens zwei verschiedenen Auszahlungsprofilen durch iterierte schwache Dominanz in polynomieller Zeit entscheidbar ist. (T)
- (c) Zeigen Sie, dass der kleinste *positive security level* in $k \times k$ binären Spielen $\frac{1}{k}$ ist. (T)
- (d) Zeigen Sie, dass G *nicht* lösbar ist durch iterierte Eliminierung stark dominierter Strategien falls es kein Ergebnis a gibt mit $u_i(a) = 1$ für alle Spieler i . (H)

Aufgabe 5 (security level, Pareto Effizienz, Dominanz)

Betrachten Sie die folgenden Zwei-Spieler-Spiele:

	L	C	R
T	2, 2	3, 2	6, 1
B	1, 2	3, 0	4, 1

	L	R
T	3, 4	0, 1
M	2, 0	5, 2
B	1, 2	7, 1

	L	C	R
T	3, 0	2, 0	2, 1
M	2, 3	1, 3	1, 5
B	2, 2	1, 1	0, 4

- (a) Bestimmen Sie für jedes der Spiele den security level beider Spieler. (H)
- (b) Bestimmen Sie für jedes der Spiele die Pareto optimalen Auszahlungsprofile. (H)
- (c) Bestimmen Sie für jedes der Spiele die schwach dominierten Aktionen beider Spieler. (H)
- (d) Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Ein Ergebnis, das sich aus stark dominierten Aktionen zusammensetzt, kann nicht Pareto dominiert sein. (H)

Aufgabe 6 (Dominanzlösbarkeit)

Ein Spiel in Normalform heißt *dominanzlösbar*, wenn alle Spieler indifferent sind zwischen allen Ergebnissen, die die iterative Prozedur überstehen, bei der in jeder Runde *alle* schwach dominierten Aktionen jedes Spielers eliminiert werden.

Betrachten Sie nun das folgende Spiel mit zwei Spielern: Spieler $i \in \{1, 2\}$ nennt eine ganze Zahl x_i , $0 \leq x_i \leq 100$, und erhält einen Nutzen von

$$u_i(x_1, x_2) = \begin{cases} x_i & \text{falls } x_1 + x_2 \leq 100, \\ x_i & \text{falls } x_1 + x_2 > 100 \text{ und } x_i < x_{3-i}, \\ 100 - x_i & \text{falls } x_1 + x_2 > 100 \text{ und } x_i > x_{3-i}, \\ 50 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass dieses Spiel dominanzlösbar ist, und bestimmen Sie die verbleibenden Ergebnisse. (H)
- (b) Ist das Spiel ebenfalls lösbar durch iterierte Eliminierung schwach dominierter Strategien? (H)