

## Übung zur Vorlesung Multiagentensysteme

Tutorübung: 9. Mai 2007      Abgabetermin Hausaufgaben: 16. Mai 2007

### Aufgabe 1    (Alice, Bob und Charlie)    (H)

Alice, Bob und Charlie spielen das folgende Spiel. Gleichzeitig hebt jeder von ihnen eine Hand oder nicht. Heben insgesamt zwei Spieler die Hand, so gewinnt Bob. Hebt keiner der Spieler die Hand, so gewinnt Charlie. Andernfalls gewinnt Alice.

- (a) Modellieren Sie diese Situation als ein Spiel in Normalform.
- (b) Bestimmen Sie die reinen Nash Gleichgewichte, falls solche existieren.
- (c) Bestimmen Sie ein Nash Gleichgewicht, in dem Alice und Bob jeweils mit 50% Wahrscheinlichkeit gewinnen.
- (d) Wie viele Nash Gleichgewichte hat das Spiel insgesamt?

### Aufgabe 2    (Charakterisierung von Nash Gleichgewichten)    (T)

Sei  $s^* = (s_1, \dots, s_n)$  ein (gemischtes) Strategieprofil in einem strategischen Spiel. Zeigen Sie, dass  $s^*$  genau dann ein (gemischtes) Nash Gleichgewicht ist wenn für jeden Spieler  $i$  die folgenden zwei Aussagen gelten:

- (i)  $u_i(s_{-i}^*, a_i) = u_i(s_{-i}^*, a'_i)$ , für alle  $a_i, a'_i \in \text{Supp}(s_i^*)$ .
- (ii)  $u_i(s_{-i}^*, a_i) \geq u_i(s_{-i}^*, a'_i)$ , für alle  $a_i \in \text{Supp}(s_i^*)$  und alle  $a'_i \notin \text{Supp}(s_i^*)$ .

### Aufgabe 3    (Nash Gleichgewichte)    (H)

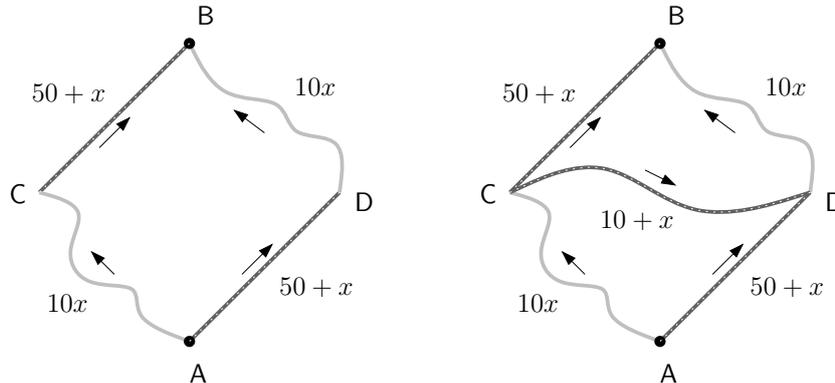
Betrachten Sie die folgenden Spiele in Normalform.

	$L$	$R$		$L$	$R$		$L$	$R$		
$T$	6, 0	0, 6		$T$	8, 0	6, 2		$T$	1, 1	0, 0
$B$	3, 2	6, 0		$B$	4, 4	7, 1		$B$	0, 0	0, 0

- (a) Bestimmen Sie alle *reinen* Nash Gleichgewichte in den obigen Spielen.
- (b) Bestimmen Sie alle (*gemischten*) Nash Gleichgewichte in den obigen Spielen.

**Aufgabe 4** (Braess Paradoxon) (T)

Vier Städte A, B, C und D sind durch vier Straßen miteinander verbunden. Die Strecken A-D und C-B sind Autobahnen, die Strecken A-C und D-B Landstraßen. Die Fahrtdauer setzt sich auf allen Straßen aus einem festen Grundwert und einem vom auf diesem Abschnitt vorhandenen Fluss  $x$  (in 1000 Fahrzeuge pro Stunde) zusammen. Auf den Autobahnen ist die Fahrtdauer  $50+x$  Minuten, während auf den Landstraßen mit  $10x$  Minuten Fahrtdauer zu rechnen ist. Insgesamt wollen 6000 Fahrer von A nach B gelangen und haben die Wahl zwischen A-C-B und A-D-B.



- (a) Zeigen Sie, dass ein Nash Gleichgewicht vorliegt, falls sich jeweils 3000 Autofahrer für jede der beiden Strecken entscheiden. Wie lange ist die Fahrtdauer für jede Autofahrer in diesem Fall?

Nach einiger Zeit wird beschlossen, eine zusätzliche Autobahn zwischen C und D zu bauen. Die Fahrtdauer auf dieser Strecke beträgt  $10+x$  Minuten.

- (b) Zeigen Sie, dass es ein neues Nash Gleichgewicht gibt, in dem sich 2000 Autofahrer für die Strecke A-C-B entscheiden, 2000 Autofahrer für die Strecke A-D-B und 2000 Autofahrer für die Strecke A-C-D-B. Wie lange ist die erwartete Fahrtdauer für jeden Fahrer?

**Aufgabe 5** (Nash Gleichgewicht und dominante Strategien)

- (a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass stark dominierte Aktionen niemals in einem Nash Gleichgewicht gespielt werden. (T)
- (b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass schwach dominierte Aktionen niemals in einem Nash Gleichgewicht gespielt werden. (H)
- (c) Zeigen Sie, dass ein Strategieprofil, das aus stark dominanten Strategien zusammengesetzt ist, das *einzigste* Nash Gleichgewicht ist. (H)
- (d) Sei das Aktionsprofil  $a^*$  eine Lösung durch iterierte schwache Dominanz. Zeigen Sie, dass  $a^*$  ein reines Nash Gleichgewicht ist. (H)
- (e) Zeigen Sie, dass jedes Teilspiel, das man durch das iterierte Löschen von schwach dominierten Aktionen erhält, ein Nash Gleichgewicht des ursprünglichen Spiels enthält. (H☆)