Ludwig-Maximilians-Universität München | **SS 2007**
Institut für Informatik | **Aufgabenblatt 6**
Dr. Brandt / Fischer & Harrenstein | **4. Juni 2007**

Übung zur Vorlesung Multiagentensysteme

Tutorübung: 6. Juni 2007   Abgabetermin Hausaufgaben: 13. Juni 2007

Aufgabe 1 (*Azyklische Präferenzen*)

Sei A eine endliche Menge von Alternativen. Eine Relation $\succsim$ heißt *quasi-transitiv*, falls ihr strikter Teil $\succ$ transitiv ist. Eine Relation $\succsim$ heißt *azyklisch*, wenn es keine Alternativen $a_1, \dots, a_k \in A$ gibt, so dass $a_1 \succ \cdots \succ a_k \succ a_1$.

(a) Zeigen Sie, dass jede quasi-transitive Relation azyklisch ist. (**T**)

(b) Zeigen Sie, dass eine vollständige und reflexive Relation $\succsim$ genau dann azyklisch ist, wenn es für jede nicht-leere Teilmenge $X \subseteq A$ ein Element $x \in X$ gibt, so dass $x \succsim y$ für alle $y \in X$. (**H**)

Aufgabe 2 (*Satz von May*)

Der in der Vorlesung betrachtete Satz von May besagt, dass *Mehrheitswahl* die *einzige* social welfare function auf zwei Alternativen ist, die *anonym*, *neutral* und *positiv responsiv* ist.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass jede anonyme social welfare function nicht-diktatorisch ist. (**H**)

(b) Zeigen Sie, dass Mehrheitswahl alle drei Axiome erfüllt. (**H**)

(c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die drei Axiome unabhängig sind. (**H**)

(d) Beweisen Sie den Satz von May. (**H**☆)

Aufgabe 3 (*Empfehlungen*)

Betrachten Sie Funktionen $F : A^N \to A$, die *Empfehlungen* einer Menge N von Wählern bezüglich einer Menge A von Alternativen auf eine kollektive Entscheidung abbilden. Betrachten Sie außerdem die folgenden Axiome:

P Wenn alle Wähler a empfehlen, dann wird a ausgewählt.

I Wird eine bestimmte Alternative a in zwei Profilen von Empfehlungen von der *selben* Menge von Wählern empfohlen, dann wird a dann und nur dann unter einem dieser Profile ausgewählt, wenn es auch unter dem anderen Profil ausgewählt wird.

Sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ ein Profil von Empfehlungen. Eine Gruppe $G \subseteq N$ heiße *fast entscheidend*, falls $F(x) = a$ wenn $x_i = a$ für alle $i \in G$ und $x_j \neq a$ für alle $j \notin G$. Eine Gruppe $G \subseteq N$ heiße *entscheidend*, falls $F(x) = a$ wenn $x_i = a$ für alle $i \in G$.

(a) Zeigen Sie, dass es immer einen Wähler $i \in N$ gibt, so dass $F(x) = x_i$. **(T)**

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\{i \in N \colon x_i = F(x)\}$ fast entscheidend ist. **(T)**

(c) Zeigen Sie, dass jede fast entscheidende Gruppe auch entscheidend ist. **(H)**

(d) Zeigen Sie, dass im Fall $|A| \geq 3$ jede Funktion, die P und I erfüllt, diktatorisch ist. **(H)**

(e) Zeigen Sie, dass alle drei Bedingungen P, I und $|A| \geq 3$ notwendig sind, um zu dieser Schlussfolgerung zu gelangen. **(H)**

Aufgabe 4 (*Oligarchie*) **(H)**

Sei A eine endliche Menge von Alternativen, N eine endliche Menge von Wählern. Betrachten Sie außerdem eine Teilmenge $S \subseteq N$, die so genannte *Oligarchie*. Gegeben ein Präferenzprofil $(\succsim_i)_{i \in N}$ gelte für die soziale Präferenzrelation $\succsim = F(\succsim_1, \ldots, \succsim_n)$ und für jedes Paar $x, y \in A$ von Alternativen $x \succsim y$ genau dann, wenn $x \succsim_i y$ für ein $i \in S$. Mit anderen Worten wird x genau dann strikt sozial bevorzugt vor y, wenn jedes Mitglied der Oligarchie x vor y bevorzugt.

(a) Zeigen Sie, dass F Pareto optimal und unabhängig von irrelevanten Alternativen ist.

(b) Zeigen Sie, dass die soziale Präferenzrelation $\succsim$ quasi-transitiv, aber nicht transitiv ist.

(c) Diskutieren Sie, ob es sich bei der Oligarchie um eine zufriedenstellende Lösung für das Problem der Präferenzbündelung handelt. Betrachten Sie insbesondere die beiden Extremfälle $S = N$ und $S = \{i\}$ für ein $i \in N$.

Aufgabe 5 (*Single-peaked Präferenzen*)

Eine Präferenzrelation auf einer Menge A von Alternativen heisst *single-peaked* bezüglich einer linearen Ordnung $\geq$ auf A, wenn es eine Alternative $x \in A$ gibt, so dass für alle $y, z \in A$ gilt:

$$y \succ z \text{ wenn } x \geq y > z \text{ oder } z > y \geq x.$$

Bezeichne a_i die maximale Alternative für $\succsim_i$. Ein Wähler $i \in N$ heißt dann *Median-Wähler* für ein Profil $(\succsim_1, \ldots, \succsim_n)$ von single-peaked Präferenzen bezüglich $\geq$, wenn

$$|\{j \in N \colon a_j \geq a_i\}| \geq \frac{|A|}{2} \quad \text{und} \quad |\{j \in N \colon a_i \geq a_j\}| \geq \frac{|A|}{2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die vom Median-Wähler ausgewählte Alternative auch Condorcet-Gewinner ist. **(T)**

(b) Zeigen Sie, dass sich die drei Präferenzen aus dem Condorcet Paradoxon (siehe Vorlesung) nicht als Familie von single-peaked Präferenzen darstellen lassen. Betrachten Sie dazu die sechs möglichen linearen Ordnungen über drei Alternativen. **(T)**

(c) Konstruieren Sie ein Beispiel mit einer geraden Anzahl von Wählern und single-peaked Präferenzen, in dem Mehrheitswahl keine transitive soziale Präferenzrelation erzeugt. **(H)**