Institut für Informatik
der Universität München
Prof. Dr. M. Hofmann
PD Dr. M. Lange
H. Gruber

SS 08

30.05.08

Übungen zur Vorlesung
Automatentheorie

Blatt 8
Besprechung in der Übung am 06.06.08

Aufgabe 21: Geben Sie LTL-Formeln an, die die folgenden Sprachen über $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ definieren.

a) $a^*b^*c^*\Sigma^\omega$

b) $\{w \in \Sigma^\omega \mid |w|_a = \infty \Rightarrow |w|_b = \infty\}$

c) $(\Sigma^*a\Sigma^*b\Sigma^*c)^\omega$

d) $\{w \in \Sigma^\omega \mid$ zwischen je zwei a's in w kommt mindestens ein b vor $\}$

Aufgabe 22: Sei φ die LTL-Formel $a\mathbf{U}b$, und sei $\mathcal{A}_\varphi$ der gemäß des Verfahrens aus der Vorlesung konstruierte Büchi-Automat über dem Alphabet $\{a, b\}$. Geben Sie einen akzeptierenden Lauf des Automaten auf dem Wort $bbb(ab)^\omega$ an, insbesondere die dabei besuchten Hintikka-Mengen.

Aufgabe 23: Eine LTL-Formel φ heißt **R**-frei, wenn der **R**-Operator in φ nicht vorkommt.

Für eine LTL-Formel φ und ein Wort w mit $w \models \varphi$ sei M_0, M_1, ... ein akzeptierender Lauf des zugehörigen Büchi-Automaten $\mathcal{A}_\varphi$. In der Vorlesung wurde bereits für **R**-freie Formeln φ durch Induktion über den Formelaufbau gezeigt, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle Teilformeln ψ im Fischer-Ladner-Abschluss von φ folgendes gilt: Wenn $\psi \in M_i$ dann $w, i \models \psi$.

Vollenden Sie den Beweis, so dass die Annahme der **R**-Freiheit von φ weggelassen werden kann.

–bitte wenden–

Aufgabe 24: Fünf chinesische Philosophen sitzen an einem runden Tisch und haben je einen Teller Reis vor sich. Auf dem Tisch liegen fünf Essstäbchen, je einer zwischen zwei benachbarten Tellern. Jeder Philosoph kann drei Dinge tun: Nachdenken, nachdenken und dabei auf die zweite Essstäbchen warten, und essen. Offenbar können nicht alle Philosophen gleichzeitig essen, denn zum Essen braucht man zwei Stäbchen. Zu diesem Zweck gibt es einen nichtdeterministischen Ober, der abwechselnd den Philosophen die Stäbchen zuteilt, so dass alle immer mal wieder essen können. Der Ober hat zu diesem Zweck die folgenden beiden Abbildung definiert: Dem Philosophen i wird das erste Stäbchen $a(i)$ und das zweite Stäbchen $b(i)$ zugewiesen mittels

$$a(i) = \begin{cases} i & \text{für } i = 1 \ldots 4 \\ 1 & \text{für } i = 5 \end{cases} \qquad b(i) = \begin{cases} i+1 & \text{für } i = 1 \ldots 4 \\ i & \text{für } i = 5 \end{cases}$$

Zu jedem Zeitpunkt wählt der Ober irgendeinen Philospohen aus. Falls der gerade isst, werden ihm die Stäbchen weggenommen, so dass er zum Nachdenken beginnt, falls er nachdenkt, wird ihm das nächste benötigte Stäbchen gereicht, falls dies frei ist.

Wir wollen dieses Protokoll formalisieren über dem Alphabet $\Sigma = \mathit{Ober} \times \mathit{Phil}$, mit $\mathit{Ober} = \{1, 2, \ldots 5\}$, $\mathit{Phil} = \underbrace{\{s, w, e\} \times \cdots \times \{s, w, e\}}_{5 \text{ mal}}$. Dabei soll z.B. $(1, s, s, s, e, w)$ heissen: Philosophen 1 bis 3 schlafen, 4 isst, 5 wartet auf das zweite Stäbchen, und der Ober wählt Nummer 1 aus.

a) Beschreiben Sie zunächst die Aussagen

   ober(i): "Ober wählt Philosoph i aus",
   schlafen(i): "Philosoph i schläft",
   warten(i): "Philosoph i wartet aufs zweite Stäbchen"
   essen(i): "Philosoph i isst"
   frei(i): "Stäbchen i ist frei"

   je als aussagenlogische Formel in Variablen aus Σ.

b) Beschreiben Sie die Bedingungen "Kein Philosph verhungert" und "Alle werden immer mal wieder bedient" als LTL-Formeln φ_{no_starve} und φ_{fair}. Sie dürfen hierzu die Abkürzungen aus der vorherigen Teilaufgabe verwenden.

c) Beschreiben Sie das oben beschriebene Protokoll p vollständig mittels einer LTL-Formel φ_p.

d) Geben Sie eine LTL-Formel an, die ausdrückt, dass jede faire Implementierung von p dafür sorgt, dass keiner verhungert.

Hinweis: Die Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar!