

LMU München, SoSe 2008

Lehrstuhl für Informatik

Schriftliche Ausarbeitung des Hauptseminars zum Thema

# Temporale Logik

Betreuer:

Priv.-Doz. Dr. Martin Lange

Ausgearbeitet von:

Nicolai Roth

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Einleitung.....                                                                                     | 3  |
| 2. Hauptteil .....                                                                                     | 4  |
| 2.1. Sprachen der Temporallogik .....                                                                  | 4  |
| 2.2. Lineare temporale Aussagenlogik .....                                                             | 4  |
| 2.3. Rückblick auf die Aussagenlogik .....                                                             | 4  |
| 2.4. Formel .....                                                                                      | 5  |
| 2.5. Beweistechnik der strukturellen Induktion .....                                                   | 5  |
| 2.6. Beispiel zur strukturellen Induktion .....                                                        | 5  |
| 2.7. The Story so far .....                                                                            | 6  |
| 2.8. Semantik .....                                                                                    | 6  |
| 2.9. Zeitmodell.....                                                                                   | 7  |
| 2.10. Interpretation.....                                                                              | 7  |
| 2.11. Modellbeziehung.....                                                                             | 7  |
| 2.12. Modaloperatoren in Worten .....                                                                  | 8  |
| 2.13. Liste allgemeingültiger Formeln .....                                                            | 8  |
| 2.14. Zusammenhang zwischen der Allgemeingültigkeit einer Formel und der<br>Folgerungseigenschaft..... | 11 |
| 2.15. Charakterisierung von Rahmeneigenschaften.....                                                   | 11 |
| 2.15.1. Beweis zu 1. (Reflexivität) .....                                                              | 12 |
| 2.15.2. Beweis zu 2. (Transitivität).....                                                              | 12 |
| 2.16. Rahmeneigenschaften für die lineare temporale Aussagenlogik .....                                | 13 |
| 3. Schluss.....                                                                                        | 14 |
| 4. Onlineliteratur .....                                                                               | 15 |

# 1. Einleitung

Die temporale Logik oder kurz auch Temporallogik (TL) ist eine Modallogik und stellt damit eine Erweiterung der „üblichen“ klassischen Logik dar. Die klassische Logik bietet eine formale Sprache für die präzise Formulierung von Aussagen. Darüber hinaus bietet sie Instrumente, mit denen man feststellen kann, ob eine Aussage „zutrifft“ oder „nicht zutrifft“. Die Temporallogik bezieht zusätzlich zeitabhängige Aussagen mit ein und stellt eine Sprache zur präzisen Formulierung von zeitlichen Beziehungen zur Verfügung. Somit ermöglicht sie die Untersuchung des (ebenfalls zeitabhängigen) Zutreffens solcher zeitabhängiger Aussagen.

Betrachten wir an einem Beispiel, welche zeitabhängigen Aussagen wir gerne formalisieren könnten. Gegeben sei ein „Ampelsystem“, also eine Verkehrsampel mit der in vielen europäischen Ländern üblichen Signalabfolge (vgl. Abb. 1)

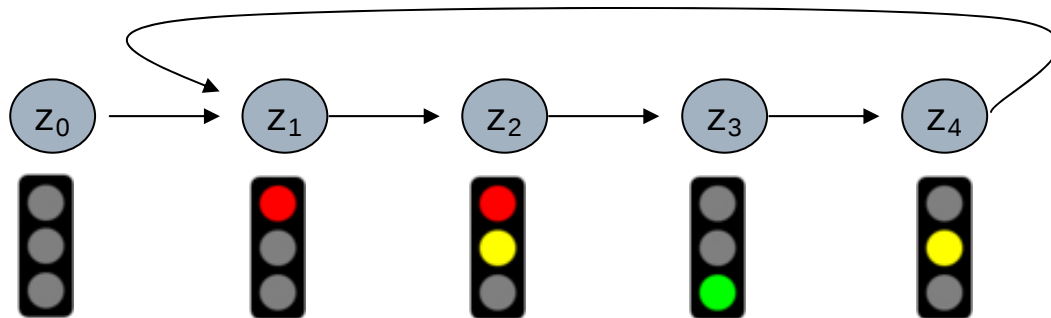


Abbildung 1

Mögliche Aussagen wären:

- A1: Jetzt ist die Ampel grün gdw. im nächsten Zeitpunkt die Ampel gelb leuchtet
- A2: Wenn die Ampel jetzt rot ist dann gibt es einen Zeitpunkt in der Zukunft, an dem sie nicht mehr rot ist
- A3: Wenn die Ampel jetzt nicht aus ist, dann ist sie es auch nicht in allen zukünftigen Zeitpunkten

Dabei würde gelten, dass die Aussage A1 nur im Zustand  $z_3$  zutreffen würde. A2 und A3 gelten in allen Zuständen. Die einzelnen Zustände lassen sich leicht mit Hilfe der Aussagenlogik beschreiben. Bezieht man die Erreichbarkeitsrelation mit ein und interpretiert diese als zeitlichen Ablauf, können Zustände samt Erreichbarkeitsrelation als Kripke Struktur verstanden werden. Somit eignet sich die Modallogik ideal für die Beschreibung solcher Systeme.

## 2. Hauptteil

### 2.1. Sprachen der Temporallogik

Die Sprache der Temporallogik lässt sich in zwei Formen einteilen. Zum einen in die lineare Temporallogik (Linear-time Temporal Logic – LTL) und zum anderen in die verzweigte Temporallogik (Computation Tree Logic – CTL). Die lineare Temporallogik basiert auf der Annahme, dass die Zeitabläufe linear sind, d.h., ihnen liegt eine endliche oder unendliche aufzählbare Sequenz  $\langle z_0, z_1, z_2, \dots \rangle$  von Zeitpunkten zu Grunde, die ein erstes Element  $z_0$  besitzt.

Der entgegengesetzten Annahme unterliegt die verzweigte Temporallogik. Hier besteht die Ansatz darin, dass die Zeit eben nicht linear ist. Um Alternativen und den Nichtdeterminismus beschreiben zu können, wird angenommen, dass die Zeit „verzweigt“ ist, d.h., jeder Zeitpunkt kann mehrere direkte Nachfolgerzeitpunkte besitzen. Diese Arbeit wird sich hauptsächlich mit der linearen Temporallogik befassen.

### 2.2. Lineare temporale Aussagenlogik

Eine Sprache  $\mathcal{L}$  der linearen temporalen Aussagenlogik ist gegeben durch ihre Signatur. Zusätzlich gehören zu  $\mathcal{L}$  die logischen Symbole der linearen temporalen Aussagenlogik. Die logischen Symbole der linearen temporalen Aussagenlogik sind die logischen Symbole der Aussagenlogik erweitert um die Menge der einstelligen Temporaljunktoren  $\{\Diamond, \Box, \circ\}$ . Die Signatur einer Sprache  $\mathcal{L}$  der linearen temporalen Aussagenlogik ist genauso definiert wie für eine Sprache der Aussagenlogik.

### 2.3. Rückblick auf die Aussagenlogik

Die logischen Symbole der Aussagenlogik sind:

- Die Menge der Hilfszeichen  $\neg$  und  $\wedge$
- Die Menge der nullstelligen Junktoren:  $\{\perp, \top\}$ <sup>1</sup>
- Die Menge der einstelligen Junktoren:  $\{\neg\}$
- Die Menge der zweistelligen Junktoren:  $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

Die Signatur einer Sprache  $\mathcal{L}$  der Aussagenlogik besteht aus einer einzigen Symbolmenge  $Rel_{\mathcal{L}}^0$  : einer Menge von Aussagensymbolen.

---

<sup>1</sup>  $\perp$  wird gelesen als Bottom,  $\top$  als Top.

## 2.4. Formel

Sei  $\mathcal{L}$  eine Sprache der linearen temporalen Aussagenlogik. Jedes Aussagensymbol von  $\mathcal{L}$  ist eine atomare  $\mathcal{L}$ -Formel. Die Menge  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  der  $\mathcal{L}$ -Formeln ist die kleinste Menge, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $\top$  und  $\perp$  und alle atomaren  $\mathcal{L}$ -Formeln sind in  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$
- Ist  $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ , so ist auch  $\neg F \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$
- Ist  $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  und  $G \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  und  $\theta$  ein zweistelliger Junktor, so ist auch  $(F \theta G) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ .
- Ist  $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ , und ist  $\mu$  ein einstelliger Temporaljunktorktor, so ist auch  $\mu F \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ .

Als Beispiele für gültige Formeln der linearen Temporalen Aussagenlogiken dienen  $F_1 = (\Diamond \circ p \Leftrightarrow \circ \Diamond p)$  und  $F_2 = (\Diamond p \Rightarrow (p \vee \circ \Diamond p))$ .

## 2.5. Beweistechnik der strukturellen Induktion

Sei  $\mathcal{L}$  eine Sprache der linearen Temporallogik. Um zu zeigen, dass alle  $\mathcal{L}$  Formeln eine Eigenschaft  $\mathcal{E}$  haben, genügt es, zu zeigen:

- Basisfälle:  $\top$  und  $\perp$  sowie alle atomaren  $\mathcal{L}$ -Formeln besitzen die Eigenschaft  $\mathcal{E}$ .
- Induktionsfälle:
  - Wenn eine  $\mathcal{L}$ -Formel  $F$  die Eigenschaft  $\mathcal{E}$  besitzt, so besitzt auch die Formel  $\neg F$  die Eigenschaft  $\mathcal{E}$ .
  - Wenn zwei  $\mathcal{L}$ -Formeln  $F_1$  und  $F_2$  die Eigenschaft  $\mathcal{E}$  besitzen, dann besitzt für jeden zweistelligen Junktor  $\theta$  auch die Formel  $(F_1 \theta F_2)$  die Eigenschaft  $\mathcal{E}$ .
  - Wenn eine  $\mathcal{L}$ -Formel  $F$  die Eigenschaft  $\mathcal{E}$  besitzt, dann besitzt für jeden einstelligen Temporaljunktorktor  $\mu$  auch die Formel  $\mu F$  die Eigenschaft  $\mathcal{E}$ .

## 2.6. Beispiel zur strukturellen Induktion

Sei  $\text{jun}[\varphi]$  die Anzahl der zweistelligen Junktoren in  $\varphi$  und  $\text{rel}[\varphi]$  die Anzahl der Vorkommen von Aussagensymbolen bzw.  $\top$  oder  $\perp$  in  $\varphi$ . Wir stellen die Behauptung auf, dass folgende Formel gilt:  $\text{rel}[\varphi] = \text{jun}[\varphi] + 1$ .

Betrachten wir wiederum die Formel  $F_1 = (\Diamond \circ p \Leftrightarrow \circ \Diamond p)$ . Hier gilt  $\text{rel}[\varphi] = 2$  und  $\text{jun}[\varphi] = 1$ , somit auch  $\text{rel}[\varphi] = \text{jun}[\varphi] + 1$ . Die Behauptung ist erfüllt.

Allgemeiner Beweis:

1. Basisfall:

Ist  $\varphi$  ein Aussagensymbol oder  $\top$  oder  $\perp$  dann ist  $\text{rel}[\varphi] = 1$  und  $\text{jun}[\varphi] = 0$ , also gilt  $\text{rel}[\varphi] = \text{jun}[\varphi] + 1$ .

2a. Induktionsfall Negation

Sei  $\varphi = \neg\psi$  und  $\text{rel}[\psi] = \text{jun}[\psi] + 1$ . Dann ist  $\text{rel}[\varphi] = \text{rel}[\psi]$  und  $\text{jun}[\varphi] = \text{jun}[\psi]$ . Also gilt  $\text{rel}[\varphi] = \text{jun}[\varphi] + 1$ .

2b. Induktionsfall zweistelliger Junktor

Sei  $\varphi$  die Formel  $(\psi_1 \theta \psi_2)$  mit  $\theta$  als zweistelligen Junktor und mit  $\text{rel}[\psi_1] = \text{jun}[\psi_1] + 1$  und mit  $\text{rel}[\psi_2] = \text{jun}[\psi_2] + 1$ . Dann ist  $\text{rel}[\varphi] = \text{rel}[\psi_1] + \text{rel}[\psi_2]$  und  $\text{jun}[\varphi] = \text{jun}[\psi_1] + 1 + \text{jun}[\psi_2]$ . Also gilt:  $\text{rel}[\varphi] = \text{rel}[\psi_1] + \text{rel}[\psi_2] = \text{jun}[\psi_1] + 1 + \text{jun}[\psi_2] + 1 = \text{jun}[\varphi] + 1$ .

2c. Induktionsfall einstelliger Temporaljunktor

Analog zu 2a.

## 2.7. The Story so far

Wir wissen nun, aus welchen Symbolen Formeln aufgebaut sein können, welche Formeln gültige Formeln sind und wie man Eigenschaften über die Struktur von gültigen Formeln zeigen kann. Wir kennen somit die Syntax der linearen temporalen Aussagenlogik. Was uns fehlt ist die Bedeutung der Temporaljunkturen und damit verbunden die Bedeutung einer Formel generell und wie einer Formel ein Wahrheitswert zugeordnet werden kann. Folglich beschäftigen sich die nächsten Punkte mit der Semantik für die lineare temporale Aussagenlogik.

## 2.8. Semantik

Der Semantik einer Temporallogik liegt eine Repräsentation der Zeit mit folgenden Merkmalen zugrunde:

- Die Zeit hat einen Ursprung, d.h., einen initialen Zeitpunkt, dem alle anderen Zeitpunkte folgen und der selbst keinem Zeitpunkt folgt
- Die Zeit ist in die Zukunft unbegrenzt, kann sich aber wiederholen
- Die Zeit kann sich in alternative Zeitströme verzweigen

## 2.9. Zeitmodell

Wir betrachten eine Kripke-Struktur mit der Menge  $Z$  der Zeitpunkte als Zustände und einer Erreichbarkeitsrelation  $\rho_Z$ .  $\rho_Z$  habe einen Ursprung. Es gibt  $z_{\text{init}} \in Z$ , so dass es kein  $z \in Z$  gibt mit  $(z, z_{\text{init}}) \in \rho_Z$  und es für jedes  $z \in Z$  einen  $\rho_Z$ -Pfad von  $z_{\text{init}}$  nach  $z$  gibt.  $\rho_Z$  sei außerdem linkstotal, zu jedem  $z \in Z$  gibt es also ein  $z' \in Z$  mit  $(z, z') \in \rho_Z$ . Ist die Relation  $\rho_Z$  zusätzlich rechtseindeutig, d.h. gibt es für jedes  $z \in Z$  nicht mehr als ein  $z' \in Z$  mit  $(z, z') \in \rho_Z$ , so heißt das Zeitmodell mit Ursprung linear. Andernfalls heißt es verzweigt. Im linearen Fall ist das Zeitmodell also eine Funktion  $\rho_Z : Z \rightarrow Z$ , die jeden Zeitpunkt auf einen Nachfolgerzeitpunkt abbildet. Die reflexive und transitive Hülle von  $\rho_Z$  bezeichnen wir als  $\rho_Z^*$ .

## 2.10. Interpretation

Sei  $\mathcal{L}$  eine Sprache der linearen temporalen Aussagenlogik und  $\rho_Z$  ein Zeitmodell mit Ursprung über einer Menge  $Z$  von Zeitpunkten. Eine  $\mathcal{L}$ -Temporalinterpretation mit Zeitmodell  $\rho_Z$  ist eine Modalinterpretation  $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$  mit:

- $W$  ist die nichtleere Menge der Welten. Hier ist  $W = Z$ .  $Z$  ist die Menge der Zeitpunkte.
- $E$  ist eine zweistellige Relation über  $W$ , d.h.,  $E \subseteq W \times W$   
Hier  $E = \rho_Z^*$ .
- Für jedes  $w \in W$  ist  $M_w$  eine  $\mathcal{L}$ -Interpretation im Sinne der Aussagenlogik.

Ist  $\rho_Z$  linear, heißt die  $\mathcal{L}$ -Temporalinterpretation ebenfalls linear, andernfalls verzweigt. Das Paar  $(W, E)$ , also der gerichtete Graph der Welten mit der Erreichbarkeitsrelation, wird auch „Frame“ oder Rahmen genannt.

## 2.11. Modellbeziehung

Sei  $\mathcal{L}$  eine Sprache der linearen temporalen Aussagenlogik. Sei  $M = (Z, \rho_Z^*, \{M_z\}_{z \in Z})$  eine  $\mathcal{L}$ -Temporalinterpretation mit Zeitmodell  $\rho_Z$ , sei  $z \in Z$  und  $F$  eine  $\mathcal{L}$ -Temporalformel.

Die Beziehung  $M \models_z F$  ist rekursiv über den Aufbau von  $F$  definiert wie folgt:

|                                     |                                                         |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $M \models_z A$                     | gdw. $M_z \models A$ für Atom $A$ , $\top$ oder $\perp$ |
| $M \models_z \neg G$                | gdw. $M \not\models_z G$ nicht gilt                     |
| $M \models_z (G_1 \wedge G_2)$      | gdw. $M \models_z G_1$ und $M \models_z G_2$            |
| $M \models_z (G_1 \vee G_2)$        | gdw. $M \models_z G_1$ oder $M \models_z G_2$           |
| $M \models_z (G_1 \Rightarrow G_2)$ | gdw. wenn $M \models_z G_1$ , so $M \models_z G_2$      |

|                                         |                                                                                                              |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $M \models_Z (G_1 \Leftrightarrow G_2)$ | gdw. entweder $M \models_Z G_1$ und $M \models_Z G_2$<br>oder weder $M \models_Z G_1$ noch $M \models_Z G_2$ |
| $M \models_Z \Box G$                    | gdw. für alle $z' \in Z$ mit $(z, z') \in \rho_Z^*$ gilt $M \models_{z'} G$                                  |
| $M \models_Z \Diamond G$                | gdw. es gibt $z' \in Z$ mit $(z, z') \in \rho_Z^*$ , so dass $M \models_{z'} G$                              |
| $M \models_Z \circ G$                   | gdw. für alle $z' \in Z$ mit $(z, z') \in \rho_Z$ gilt $M \models_{z'} G$                                    |

Die Modellbeziehung  $M \models F$  gilt genau dann, wenn für alle  $z \in Z$  die Beziehung  $M \models_z F$  gilt. Man sagt dann auch,  $M$  erfüllt  $F$  oder  $M$  ist ein Modell von  $F$ .

## 2.12. Modaloperatoren in Worten

Durch die oben genannte Modellbeziehung lassen sich die Modelloperatoren  $\{\Diamond, \Box, \circ\}$  auch in Worte fassen:

- $\circ A$  „ $A$  trifft in unmittelbar folgenden Zeitpunkten zu“  
(nexttime Operator)
- $\Diamond A$  „ $A$  trifft jetzt oder in (mindestens) einem nachfolgenden Zeitpunkt zu“  
(sometime Operator)
- $\Box A$  „ $A$  trifft jetzt und in allen nachfolgenden Zeitpunkten zu“  
(always Operator)

Zurück zu den Beispielformeln von 2.4.:  $F_1 = (\Diamond \circ p \Leftrightarrow \circ \Diamond p)$  lässt sich wie folgt übersetzen: „Es gilt genau dann irgendwann, dass  $p$  unmittelbar danach zutrifft, wenn ab dem nächsten Zeitpunkt irgendwann  $p$  gilt“ und  $F_2 = (\Diamond p \Rightarrow (p \vee \circ \Diamond p))$  bedeutet so viel wie „Wenn  $p$  irgendwann gilt, dann gilt  $p$  jetzt, oder ab dem nächsten Zeitpunkt gilt irgendwann  $p$ .“

## 2.13. Liste allgemeingültiger Formeln

Eine  $\mathcal{L}$ -Formel  $F$  heißt allgemeingültig, wenn sie von jeder  $\mathcal{L}$ -Temporalinterpretation erfüllt wird, andernfalls falsifizierbar. Die folgenden Formeln gelten für lineare Temporalinterpretationen:

- (R1)  $\top \Leftrightarrow \Box \top$
- (R2)  $\perp \Leftrightarrow \Box \perp$
- (R3)  $\top \Leftrightarrow \Diamond \top$
- (R4)  $\perp \Leftrightarrow \Diamond \perp$
- (R5)  $\top \Leftrightarrow \circ \top$
- (R6)  $\perp \Leftrightarrow \circ \perp$

## Dualitäts-Gesetze

$$(R7) \neg \circ A \Leftrightarrow \circ \neg A$$

$$(R8) \neg \Box A \Leftrightarrow \Diamond \neg A$$

$$(R9) \neg \Diamond A \Leftrightarrow \Box \neg A$$

## Reflexivitäts-Gesetze

$$(R10) \Box A \Rightarrow A$$

$$(R11) A \Rightarrow \Diamond A$$

## Gesetze über die „Stärke“ der Operatoren

$$(R12) \Box A \Rightarrow \circ A$$

$$(R13) \circ A \Rightarrow \Diamond A$$

$$(R14) \Box A \Rightarrow \Diamond A$$

$$(R15) \Diamond \Box A \Rightarrow \Box \Diamond A$$

## Idempotenz-Gesetze

$$(R16) \Box \Box A \Leftrightarrow \Box A$$

$$(R17) \Diamond \Diamond A \Leftrightarrow \Diamond A$$

## Kommutativ-Gesetze

$$(R18) \Box \circ A \Leftrightarrow \circ \Box A$$

$$(R19) \Diamond \circ A \Leftrightarrow \circ \Diamond A$$

## Distributiv-Gesetze

$$(R20) \circ (A \wedge B) \Leftrightarrow \circ A \wedge \circ B$$

$$(R21) \circ (A \vee B) \Leftrightarrow \circ A \vee \circ B$$

$$(R22) \Box (A \wedge B) \Leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$$

$$(R23) \Diamond (A \vee B) \Leftrightarrow \Diamond A \vee \Diamond B$$

## Schwache Distributiv-Gesetze

$$(R24) \Box A \vee \Box B \Rightarrow \Box (A \vee B)$$

$$(R25) \Diamond (A \wedge B) \Rightarrow \Diamond A \wedge \Diamond B$$

## Fixpunkt-Charakterisierungen

$$(R26) \Box A \Leftrightarrow A \wedge \circ \Box A$$

$$(R27) \Diamond A \Leftrightarrow A \vee \circ \Diamond A$$

## Monotonie-Gesetze

$$(R28) \Box (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\circ A \Rightarrow \circ B)$$

$$(R29) \Box (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Diamond A \Rightarrow \Diamond B)$$

## Rahmen-Gesetze

$$(R30) \Box A \Rightarrow (\circ B \Rightarrow \circ(A \wedge B))$$

$$(R31) \Box A \Rightarrow (\Box B \Rightarrow \Box(A \wedge B))$$

$$(R32) \Box A \Rightarrow (\Diamond B \Rightarrow \Diamond(A \wedge B))$$

Bei einigen Formeln mag man sich fragen, ob nicht auch die Gegenrichtung allgemeingültig ist. Betrachten wir beispielsweise die Gegenrichtung von R15, also die Formel  $(\Box \Diamond A \Rightarrow \Diamond \Box A)$ . Die Formel ist nicht allgemeingültig, wenn es eine Interpretation gibt, in der sie nicht gilt. Betrachten wir das folgende Beispiel:

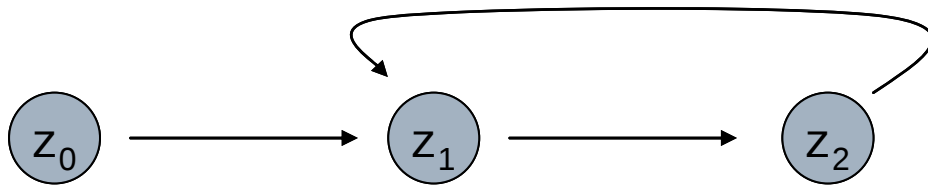


Abbildung 2

Dabei soll die Menge der Aussagensymbole nur aus dem Aussagensymbol  $p$  bestehen. In  $z_0$  und  $z_1$  soll  $p$  wahr sein, in  $z_2$  jedoch nicht. Dann gilt in allen Zuständen  $\Diamond p$ . Folglich gilt in  $z_0$  auch  $\Box \Diamond p$ . Nehmen wir an, dass auch die Gegenrichtung von R15 gilt, dann muss in  $z_0$  auch  $\Diamond \Box p$  gelten. Dazu wiederum muss mindestens in einem der drei Zustände  $\Box p$  gelten. Dies ist jedoch in keinem der Zustände der Fall. Folglich war unsere Annahme falsch und damit ist die Gegenrichtung von R15 nicht allgemeingültig.

Ähnlich verhält es sich mit den Gegenrichtungen der schwachen Distributiv-Gesetze. Betrachten wir zuerst die Gegenrichtung von R24 mit den Aussagesymbolen  $p$  und  $q$  erneut am Beispiel aus Abbildung 2. In  $z_0$  und  $z_2$  soll  $q$  wahr sein und  $p$  falsch sein. In  $z_1$  gelte  $p$  aber nicht  $q$ . Dann gilt in  $z_0$  sicherlich  $\Box (p \vee q)$ . Unter der Annahme, dass auch die Gegenrichtung von R24 allgemeingültig ist, müsste in  $z_0$  auch  $(\Box p \vee \Box q)$  gelten. Da aber weder in allen Zuständen  $\Box p$  noch  $\Box q$  gilt, gilt in  $z_0$  auch nicht  $(\Box p \vee \Box q)$ . Damit ist die Gegenrichtung zu R24 nicht allgemeingültig. Der Beweis zu der Gegenrichtung von R25 läuft analog.

## 2.14. Zusammenhang zwischen der Allgemeingültigkeit einer Formel und der Folgerungseigenschaft

Es gilt aus  $F$  folgt  $G$ , notiert  $F \models G$ , genau dann, wenn für jede Temporalinterpretation  $M$  gilt: wenn  $M \models F$  dann  $M \models G$  (jedes Modell von  $F$  ist auch Modell von  $G$ ). Sei  $\mathcal{L}$  eine Sprache der temporalen Aussagenlogik und seien  $F$  und  $G$   $\mathcal{L}$ -Formeln. Wenn  $(F \Rightarrow G)$  allgemeingültig ist, dann  $F \models G$ . Im Fall der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe gilt auch die Gegenrichtung. Für die temporalen Aussagenlogik gilt diese im Allgemeinen nicht.

Beweis: Vorausgesetzt sei, dass  $(F \Rightarrow G)$  allgemeingültig ist, d.h., für jede Temporalinterpretation  $M$  gelte  $M \models (F \Rightarrow G)$ . Sei  $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$  eine Temporalinterpretation mit  $M \models F$ . Nach Voraussetzung gilt auch  $M \models (F \Rightarrow G)$ . Sei  $w \in W$  beliebig, aber fest. Nach Definition gilt  $M \models_w F$  und  $M \models_w (F \Rightarrow G)$ . Dann gilt auch  $M \models_w G$ . Da  $w$  beliebig ist, gilt für alle  $w \in W$  die Beziehung  $M \models_w G$ , also auch,  $M \models G$ .

Widerlegung der Gegenrichtung:

Sei  $\mathcal{L}$  eine Sprache mit dem Aussagensymbol  $p$ . Sei  $F = p$  und  $G = \Box p$ . Um zu zeigen, dass die Folgerungsbeziehung  $p \models \Box p$  gilt, sei  $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$  eine Temporalinterpretation mit  $M \models p$ .

Sei  $w_1 \in W$ . Weil  $M \models p$  gilt, gilt  $M \models_w p$  für alle  $w \in W$ , unter anderem für alle  $w_2 \in W$ , so dass  $(w_1, w_2) \in E$ . Also gilt  $M \models_{w_1} \Box p$ . Da  $w_1$  beliebig ist, gilt  $M \models \Box p$ . Damit gilt die Folgerungsbeziehung  $p \models \Box p$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $(p \Rightarrow \Box p)$  nicht allgemeingültig ist. Dies können wir uns wieder an einem Beispiel der Abbildung 2 verdeutlichen: Wir nehmen an, dass in  $z_0$  und  $z_1$   $p$  gilt, in  $z_2$  gelte  $q$ . Unter der Annahme, dass  $p \Rightarrow \Box p$  allgemeingültig ist, müsste in  $z_0$  auch  $\Box p$  gelten. Dazu müsste jedoch auch in  $z_2$   $p$  gelten, was aber nicht der Fall ist. Folglich gilt in  $\Box p$  in  $z_0$  nicht und die Annahme über die Allgemeingültigkeit der Formel  $p \Rightarrow \Box p$  ist falsch.

## 2.15. Charakterisierung von Rahmeneigenschaften

In diesem Absatz soll auf die Charakterisierung von Rahmeneigenschaften durch Modallogische Formeln eingegangen werden. Sei  $\mathcal{L}$  eine Sprache der Modallogik, deren Signatur mindestens ein Relationssymbol enthält. Sei  $(W, E)$  ein Rahmen.

- $E$  ist reflexiv gdw. für jede  $\mathcal{L}$ -Modalinterpretation  $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$  mit dem gegebenen Rahmen und für jede  $\mathcal{L}$ -Formel gilt  $M \models (\Box F \Rightarrow F)$
- $E$  ist transitiv gdw. für ... gilt  $M \models (\Box F \Rightarrow \Box \Box F)$
- $E$  ist symmetrisch gdw. für ... gilt  $M \models (F \Rightarrow \Box \Diamond F)$
- $E$  ist links total gdw. für ... gilt  $M \models (\Box F \Rightarrow \Diamond F)$
- $E$  ist rechtseindeutig gdw. für ... gilt  $M \models (\Diamond F \Rightarrow \Box F)$

Um Verwechslungen zu vermeiden ist für die nachfolgenden Beweise zu beachten, dass  $\Box$  und  $\Diamond$  im modallogischen Sinne interpretiert werden, nicht im temporallogischen Sinn.

### 2.15.1. Beweis zu 1. (Reflexivität)

Richtung „ $\rightarrow$ “

Voraussetzung: E ist reflexiv

Sei  $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$  eine  $\mathcal{L}$ -Modalinterpretation mit gegebenem Rahmen und sei F eine  $\mathcal{L}$ -Formel.

Annahme:  $M \not\models (\Box F \Rightarrow F)$ .

Dann gibt es eine Welt  $w \in W$  mit  $M \not\models_w (\Box F \Rightarrow F)$ , d.h.  $M \models_w \Box F$  und  $M \not\models_w F$ . Wegen der Reflexivität von E ist  $(w, w) \in E$ , und wegen  $M \models_w \Box F$  gilt  $M \models_w F$ . Widerspruch

Richtung „ $\leftarrow$ “

Voraussetzung: für jede  $\mathcal{L}$ -Modalinterpretation  $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$  mit dem gegebenem Rahmen und für jede  $\mathcal{L}$ -Formel F gilt:  $M \models (\Box F \Rightarrow F)$

Annahme: E ist nicht reflexiv, das heißt, es gibt eine Welt  $w_0 \in W$  mit  $(w_0, w_0) \notin E$ .

Sei F eine atomare  $\mathcal{L}$ -Formel. Sie ist also erfüllbar und falsifizierbar. Sei  $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$  eine  $\mathcal{L}$ -Modalinterpretation mit  $M \not\models_{w_0} F$  und  $M \models_w F$  für alle  $w \in W \setminus \{w_0\}$ . Dann gilt insbesondere  $M \models_w F$  für alle  $w$  mit  $(w_0, w) \in E$ . Das bedeutet,  $M \models_{w_0} \Box F$ . Wegen  $M \not\models_{w_0} F$  gilt dann  $M \not\models_{w_0} (\Box F \Rightarrow F)$ , also  $M \not\models (\Box F \Rightarrow F)$ . Widerspruch.

### 2.15.2. Beweis zu 2. (Transitivität)

Richtung „ $\rightarrow$ “

Voraussetzung: E ist transitiv

Sei  $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$  eine  $\mathcal{L}$ -Modalinterpretation mit gegebenem Rahmen und sei F eine  $\mathcal{L}$ -Formel.

Annahme:  $M \not\models (\Box F \Rightarrow \Box \Box F)$ .

Dann gibt es eine Welt  $w_1 \in W$  mit  $M \not\models_{w_1} (\Box F \Rightarrow \Box \Box F)$ , das heißt  $M \models_{w_1} \Box F$  und  $M \not\models_{w_1} \Box \Box F$ . Also gibt es Welten  $w_2, w_3 \in W$  mit  $(w_1, w_2) \in E$  und  $(w_2, w_3) \in E$  und  $M \not\models_{w_3} F$ . Wegen der Transitivität von E ist  $(w_1, w_3) \in E$ , und wegen  $M \models_{w_1} \Box F$  gilt  $M \models_{w_3} F$ . Widerspruch.

Richtung „ $\leftarrow$ “

Voraussetzung: Für jede  $\mathcal{L}$ -Modalinterpretation  $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$  mit dem gegebenen Rahmen und für jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $F$  gilt:  $M \models (\Box F \Rightarrow \Box \Box F)$

Annahme:  $E$  ist nicht transitiv, d.h., es gibt Welten  $w_1, w_2, w_3 \in W$  mit  $(w_1, w_2) \in E$  und  $(w_2, w_3) \in E$  und  $(w_1, w_3) \notin E$

Sei  $F$  eine atomare  $\mathcal{L}$ -Formel. Sie ist also erfüllbar und falsifizierbar. Sei  $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$  eine  $\mathcal{L}$ -Modalinterpretation mit  $M \not\models_{w_3} F$  und  $M \models_w F$  für alle  $w \in W \setminus \{w_3\}$ . Dann gilt insbesondere  $M \models_w F$  für alle  $w$  mit  $(w_1, w) \in E$ . Das bedeutet,  $M \models_{w_1} \Box F$ . Wegen  $(w_2, w_3) \in E$  und  $M \not\models_{w_3} F$  gilt  $M_{w_2} \not\models \Box F$  und wegen  $(w_1, w_2) \in E$  auch  $M_{w_1} \not\models \Box \Box F$ . Damit gilt  $M_{w_1} \not\models (\Box F \Rightarrow \Box \Box F)$ , also  $M \not\models (\Box F \Rightarrow \Box \Box F)$ . Widerspruch.

## 2.16. Rahmeneigenschaften für die lineare temporale Aussagenlogik

Für die lineare temporale Aussagenlogik sollten also die Rahmeneigenschaften für Reflexivität, Transitivität und Linkstotalität allgemeingültig sein: Die Reflexivität folgt unmittelbar aus R10, die Transitivität aus R16 und die Linkstotalität aus R14. Nicht hingegen gelten die Symmetrie und die Rechtseindeutigkeit, was sich wiederum durch einfache Beispiele an Abbildung 2 zeigen lässt.

### 3. Schluss

Zum Abschluss soll noch kurz auf mögliche Spracherweiterungen eingegangen werden. Bisher können wir Aussagen über das „Jetzt“ und über nachfolgende Zustände machen. Es fehlen uns Aussagen über die Vergangenheit, „sequenzielle / bedingte“ Aussagen (bis dahin, im ersten Zustand nach ... ) oder Aussagen über den Anfangszustand.

Mit Hilfe der sogenannten Past-Operatoren ist es uns möglich Aussagen über die Vergangenheit zu formulieren:

- $\ominus A$ : „A trifft in vorhergehenden Zuständen zu“  
(previous-Operator)
- $\boxplus A$ : „A trifft jetzt und in allen vorhergehenden Zuständen zu“  
(has-always-been-Operator)
- $\Diamond A$ : „A trifft jetzt oder in einem vorhergehenden Zustand zu“  
(once-Operator)

Eine weitere Erweiterung erlaubt uns „sequenzielle / bedingte“ Aussagen auszudrücken: Dazu werden mehrere zweistellige Operatoren zugelassen:

- A **until** B: „Es gibt einen nachfolgenden Zustand, in dem B zutrifft, und A trifft in allen Zuständen bis dahin zu“
- A **unless** B: „Falls es einen nachfolgenden Zustand gibt, in dem B zutrifft, so trifft A in allen Zuständen bis dahin zu  
(andernfalls trifft A in allen nachfolgenden Zuständen zu)“
- A **atnext** B: „A trifft im ersten nachfolgenden Zustand zu, in dem B zutrifft (falls dieser Zustand existiert)“
- A **before** B: „Falls es einen nachfolgenden Zustand gibt, in dem B zutrifft, so trifft A in einem Zustand davor zu“

Dabei wird der Operator **until** auch als starker Operator bezeichnet, da es hier bestimmt ist, dass B irgendwann zutreffen wird. **Unless**, **atnext** und **before** lassen es auch zu, dass B niemals zutreffen wird.

Die letzte Erweiterung betrifft den Anfangszustand. Mit **init** wird eine Variable eingeführt, die nur im Anfangszustand gilt. Die Aussage „A trifft im Anfangszustand zu“ lässt sich somit über  $\text{init} \Rightarrow A$  beschreiben. Mit Hilfe der Past-Operatoren auch ausdrückbar als:  $\ominus \perp \Rightarrow A$ .

## 4. Onlineliteratur

Kurzskriptum zur Vorlesung Temporale Logik und Zustandssysteme, F. Kröger

<http://www.pst.informatik.uni-muenchen.de/lehre/WS0607/tl/>

<http://www.pst.ifi.lmu.de/~kroeger/Kurzskriptum-Temporale-Logik.pdf>

Temporal Logic, Carsten Lutz

<http://lat.inf.tu-dresden.de/teaching/ss2006/tl/TemporalLogic.ps>

Mathematical Logic, Helmut Schwichtenberg

<http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~schwicht/lectures/logic/ws03/ml.pdf>

Skript zur Vorlesung Temporallogik, Martin Lange

<http://www.tcs.informatik.uni-muenchen.de/lehre/WS05-06/Temporal/>