

Vortrag Temporallogik

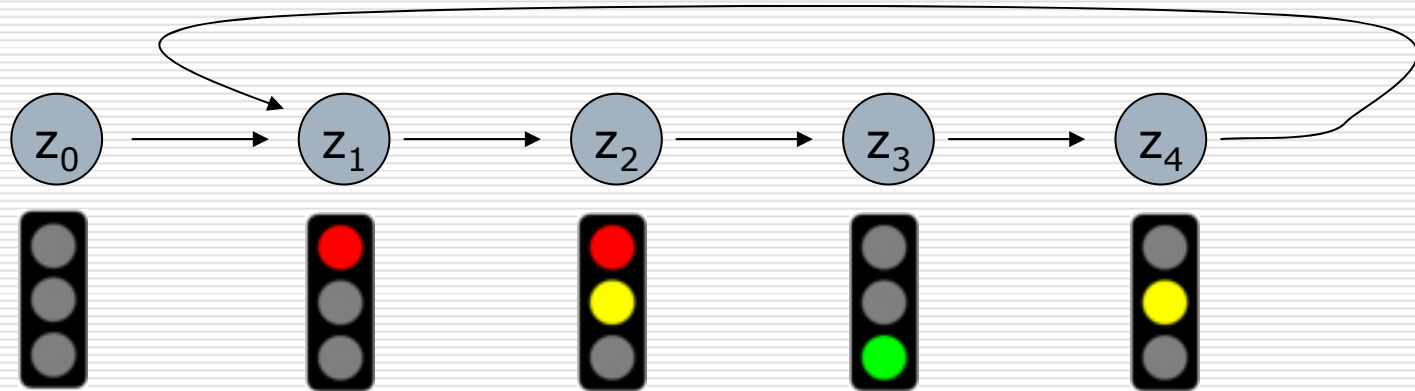
Nicolai Roth – 21. Mai 2008

Wozu temporale Logik ?

- Anliegen der „üblichen“ (mathematischen) Logik (klassische Logik):
 - Bereitstellung einer formalen Sprache zur präzisen Formulierung von (mathematischen) Aussagen
 - Untersuchung von Instrumenten, mit denen man feststellen kann, ob eine Aussage „zutrifft“ oder „nicht zutrifft“

- Temporale Logik (TL) bezieht zusätzlich ein:
 - Betrachtung zeitabhängiger Aussagen
 - Bereitstellung einer Sprache zur präzisen Formulierung von zeitlichen Beziehungen von Aussagen und die Untersuchung des (ebenfalls zeitabhängigen) Zutreffens solcher Beziehungen

Beispiel: Ampelsystem



- Welche Aussagen möchte man beispielsweise formalisieren können:
 - Jetzt ist die Ampel grün gdw. im nächsten Zeitpunkt die Ampel gelb leuchtet
 - Wenn die Ampel jetzt rot ist dann gibt es einen Zeitpunkt in der Zukunft, an dem sie nicht mehr rot ist
 - Wenn die Ampel jetzt nicht aus ist, dann ist sie es auch nicht in allen zukünftigen Zeitpunkten

Beispiel: Ampelsystem

- ❑ Mit Hilfe der Aussagenlogik lassen sich die einzelnen Zustände beschreiben.
- ❑ Die Zustände samt der Erreichbarkeitsrelation können als Kripke-Struktur verstanden werden, bei der die Erreichbarkeitsrelation als zeitlicher Ablauf interpretiert wird.
- ❑ Die Modallogik eignet sich somit ideal für die Beschreibung solcher Systeme

Sprache der Temporallogik

- Lineare Temporal Logik (Linear-time Temporal Logic - LTL)
 - Zeitabläufe sind linear, d.h., ihnen liegt eine endliche oder unendliche aufzählbare Sequenz $\langle z_0, z_1, z_2, \dots \rangle$ von Zeitpunkten zu Grunde, die ein erstes Element z_0 besitzt

- Verzweigte Temporallogik (Computation Tree Logic – CTL)
 - Annahme, dass die Zeit linear nicht ist
 - Um Alternativen und den Nichtdeterminismus beschreiben zu können, wird angenommen, dass die Zeit „verzweigt“ ist, d.h., jeder Zeitpunkt kann mehrere direkte Nachfolgerzeitpunkte besitzen

Lineare temporale Aussagenlogik

- Eine Sprache $\mathcal{L}$ der linearen temporalen Aussagenlogik ist gegeben durch ihre Signatur. Zusätzlich gehören zu $\mathcal{L}$ die logischen Symbole der linearen temporalen Aussagenlogik.
- Die logischen Symbole der linearen temporalen Aussagenlogik sind die logischen Symbole der Aussagenlogik erweitert um die Menge der einstelligen Temporaljunktoren: $\{\Diamond, \Box, \circ\}$
- Die Signatur einer Sprache $\mathcal{L}$ der linearen temporalen Aussagenlogik ist genauso definiert wie für eine Sprache der Aussagenlogik

Whd. Aussagenlogik

- Die logischen Symbole der Aussagenlogik sind:
 - Die Menge der Hilfszeichen $)$ und $($
 - Die Menge der nullstelligen Junktoren: $\{\perp, \top\}$
 - Die Menge der einstelligen Junktoren: $\{\neg\}$
 - Die Menge der zweistelligen Junktoren: $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

- Die Signatur einer Sprache $\mathcal{L}$ der Aussagenlogik besteht aus einer einzigen Symbolmenge $Rel_{\mathcal{L}}^0$: einer Menge von Aussagensymbolen

Formel

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache der temporalen Aussagenlogik

- Jedes Aussagensymbol von $\mathcal{L}$ ist eine atomare $\mathcal{L}$ -Formel.
- Die Menge $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ der $\mathcal{L}$ -Formeln, ist die kleinste Menge, die die folgenden Bedingungen erfüllt:
 - 1. $\top$ und $\perp$ und alle atomaren $\mathcal{L}$ -Formeln sind in $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$
 - 2. Ist $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, so ist auch $\neg F \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$
 - 3. Ist $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ und $G \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ und θ ein zweistelliger Junktor, so ist auch $(F \theta G) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$.
 - 4. Ist $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, und ist μ ein einstelliger Temporaljunktor, so ist auch $\mu F \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$

Beispielformeln

- Lineare temporale Aussagenlogik
 - $F_1 = (\Diamond \circ p \Leftrightarrow \circ \Diamond p)$
 - $F_2 = (\Diamond p \Rightarrow (p \vee \circ \Diamond p))$

Beweistechnik der strukturellen Induktion

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache der linearen Temporallogik. Um zu zeigen, dass alle $\mathcal{L}$ Formeln eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ haben, genügt es, zu zeigen:

- Basisfälle: $\top$ und $\perp$ sowie alle atomaren $\mathcal{L}$ -Formeln besitzen die Eigenschaft $\mathcal{E}$.
- Induktionsfälle:
 - Wenn eine $\mathcal{L}$ -Formel F die Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzt, so besitzt auch die Formel $\neg F$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$.
 - Wenn zwei $\mathcal{L}$ -Formeln F_1 und F_2 die Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzen, dann besitzt für jeden zweistelligen Junktor θ auch die Formel $(F_1 \theta F_2)$ die Eigenschaft $\mathcal{E}$.
 - Wenn eine $\mathcal{L}$ -Formel F die Eigenschaft $\mathcal{E}$ besitzt, dann besitzt für jeden einstelligen Temporaljunktor μ auch die Formel μF die Eigenschaft $\mathcal{E}$.

Beispiel

- Sei $\text{jun}[\varphi]$ die Anzahl der zweistelligen Junktoren in φ
- Sei $\text{rel}[\varphi]$ die Anzahl der Vorkommen von Aussagensymbolen bzw. $\top$ oder $\perp$ in φ

- Behauptung: $\text{rel}[\varphi] = \text{jun}[\varphi] + 1$

- Betrachten wir $F_1 = (\Diamond \circ p \Leftrightarrow \circ \Diamond p)$
Hier gilt: $\text{rel}[\varphi] = 2$
 $\text{jun}[\varphi] = 1$

- Somit gilt: $\text{rel}[\varphi] = \text{jun}[\varphi] + 1$

Allgemeiner Beweis mit Hilfe der Strukturellen Induktion (1)

- 1. Basisfall
Ist φ ein Aussagensymbol oder $\top$ oder $\perp$ dann ist $\text{rel}[\varphi] = 1$
und $\text{jun}[\varphi] = 0$, also gilt $\text{rel}[\varphi] = \text{jun}[\varphi] + 1$

- 2a. Induktionsfall Negation
Sei $\varphi = \neg\psi$ und $\text{rel}[\psi] = \text{jun}[\psi] + 1$
Dann ist $\text{rel}[\varphi] = \text{rel}[\psi]$
Und $\text{jun}[\varphi] = \text{jun}[\psi]$
Also: $\text{rel}[\varphi] = \text{jun}[\varphi] + 1$

- 2c. Induktionsfall einstelliger Temporaljunktork
analog zu 2a.

Allgemeiner Beweis mit Hilfe der Strukturellen Induktion (2)

□ 2b. Induktionsfall zweistelliger Junktur

Sei φ die Formel $(\psi_1 \theta \psi_2)$ mit θ als zweistelligem Junktur und mit $\text{rel}[\psi_1] = \text{jun}[\psi_1] + 1$ und mit $\text{rel}[\psi_2] = \text{jun}[\psi_2] + 1$.

Dann ist $\text{rel}[\varphi] = \text{rel}[\psi_1] + \text{rel}[\psi_2]$ und
 $\text{jun}[\varphi] = \text{jun}[\psi_1] + 1 + \text{jun}[\psi_2]$

Also: $\text{rel}[\varphi] = \text{rel}[\psi_1] + \text{rel}[\psi_2] =$
 $\text{jun}[\psi_1] + 1 + \text{jun}[\psi_2] + 1 =$
 $\text{jun}[\varphi] + 1$

... bis hier her

- Wir wissen nun:
 - Aus welchen Symbolen Formel aufgebaut sein können.
 - Welche Formeln gültige Formeln sind
 - Wie man Eigenschaften für Formeln zeigen kann

Wir kennen die Syntax.

- Es fehlt:
 - Welche Bedeutung haben die temporal Junktoren
 - Welche Bedeutung hat eine Formel generell
 - Wie wird einer Formel ein Wahrheitswert zugeordnet

Uns fehlt die Semantik.

Semantik

Der Semantik einer Temporallogik liegt eine Repräsentation der Zeit mit folgenden Merkmalen zu Grunde:

- Die Zeit hat einen Ursprung, d.h., einen initialen Zeitpunkt, dem alle anderen Zeitpunkte folgen und der selbst keinem Zeitpunkt folgt
- Die Zeit ist in die Zukunft unbegrenzt, kann sich aber wiederholen
- Die Zeit kann sich in alternative Zeitströme verzweigen

Zeitmodell

- Wir betrachten eine Kripke-Struktur mit der Menge Z der Zeitpunkte als Zustände und einer Erreichbarkeitsrelation ρ_Z .
- ρ_Z habe einen **Ursprung**: es gibt $z_{\text{init}} \in Z$, so dass
 - a) es kein $z \in Z$ gibt mit $(z, z_{\text{init}}) \in \rho_Z$
 - b) es für jedes $z \in Z$ einen ρ_Z -Pfad von z_{init} nach z gibt.
- ρ_Z sei zudem **linkstotal**: zu jedem $z \in Z$ gibt es $z' \in Z$ mit $(z, z') \in \rho_Z$.

Zeitmodell

- Ist die Relation ρ_Z zusätzlich **rechtseindeutig**, d.h., gibt es für jedes $z \in Z$ nicht mehr als ein $z' \in Z$ mit $(z, z') \in \rho_Z$, so heißt das Zeitmodell mit Ursprung **linear**. Andernfalls heißt es **verzweigt**.
- Im linearen Fall ist das Zeitmodell also eine **Funktion** $\rho_Z : Z \rightarrow Z$, die jeden Zeitpunkt auf einen Nachfolgerzeitpunkt abbildet.
- ρ_Z^* sei die **reflexive und transitive Hülle** von ρ_Z .

Interpretation

- Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache der linearen temporalen Aussagenlogik und ρ_Z ein Zeitmodell mit Ursprung über einer Menge Z von Zeitpunkten. Eine $\mathcal{L}$ -Temporalinterpretation mit Zeitmodell ρ_Z ist eine Modalinterpretation $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$ mit:
 - W ist die nichtleere Menge der Welten. Hier mit $W = Z$ die Menge der Zeitpunkte
 - E ist eine zweistellige Relation über W , d.h., $E \subseteq W \times W$
Hier $E = \rho_Z^*$
 - Für jedes $w \in W$ ist M_w eine $\mathcal{L}$ -Interpretation im Sinne der Aussagenlogik

Interpretation

- Ist ρ_z linear, heißt die $\mathcal{L}$ -Temporalinterpretation ebenfalls linear, andernfalls verzweigt.
- Das Paar (W, E) , also der gerichtete Graph der Welten mit der Erreichbarkeitsrelation, wird auch „Frame“ oder Rahmen genannt

Modelbeziehung (1)

- Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache der linearen temporalen Aussagenlogik
Sei $M = (Z, \rho_Z^*, \{M_z\}_{z \in Z})$ eine $\mathcal{L}$ -Temporalinterpretation mit Zeitmodell ρ_Z , sei $z \in Z$ und F eine $\mathcal{L}$ -Temporalformel.
- Die Beziehung $M \models_z F$ ist rekursiv über den Aufbau von F definiert wie folgt:

$M \models_z A$	gdw. $M_z \models A$ für A Atom, $\top$ oder $\perp$
$M \models_z \neg G$	gdw. $M \models_z G$ nicht gilt
$M \models_z (G_1 \wedge G_2)$	gdw. $M \models_z G_1$ und $M \models_z G_2$
$M \models_z (G_1 \vee G_2)$	gdw. $M \models_z G_1$ oder $M \models_z G_2$
$M \models_z (G_1 \Rightarrow G_2)$	gdw. wenn $M \models_z G_1$, so $M \models_z G_2$
$M \models_z (G_1 \Leftrightarrow G_2)$	gdw. entweder $M \models_z G_1$ und $M \models_z G_2$ oder weder $M \models_z G_1$ noch $M \models_z G_2$

Modelbeziehung (2)

$M \models_z \Box G$ gdw. für alle $z' \in Z$ mit $(z, z') \in \rho_z^*$ gilt $M \models_{z'} G$
 $M \models_z \Diamond G$ gdw. es gibt $z' \in Z$ mit $(z, z') \in \rho_z^*$, so dass $M \models_{z'} G$
 $M \models_z \circ G$ gdw. für alle $z' \in Z$ mit $(z, z') \in \rho_z$ gilt $M \models_{z'} G$

- Die Modellbeziehung $M \models F$ gilt genau dann, wenn für alle $z \in Z$ die Beziehung $M \models_z F$ gilt. Man sagt dann auch, M erfüllt F oder M ist ein Modell von F .

Modaloperatoren in Worten

- ◦ A „A trifft in unmittelbar folgenden Zeitpunkten zu“
(nexttime Operator)
- ◇ A „A trifft jetzt oder in (mindestens) einem nachfolgenden
Zeitpunkt zu“
(sometime Operator)
- □ A „A trifft jetzt und in allen nachfolgenden Zeitpunkten zu“
(always Operator)

Modaloperatoren in Worten

□ $F_1 = (\Diamond \circ p \Leftrightarrow \circ \Diamond p)$

- Es gilt genau dann irgendwann, dass p unmittelbar danach zutrifft, wenn ab dem nächsten Zeitpunkt irgendwann p gilt

□ $F_2 = (\Diamond p \Rightarrow (p \vee \circ \Diamond p))$

- Wenn p irgendwann gilt, dann gilt p jetzt, oder ab dem nächsten Zeitpunkt gilt irgendwann p.

Liste allgemeingültiger Formeln

- Eine $\mathcal{L}$ -Formel F heißt allgemeingültig, wenn sie von jeder $\mathcal{L}$ -Temporalinterpretation erfüllt wird, andernfalls falsifizierbar
- Die folgenden Formel gelten für lineare Temporalinterpretationen:
 - (R1) $\top \Leftrightarrow \Box \top$
 - (R2) $\perp \Leftrightarrow \Box \perp$
 - (R3) $\top \Leftrightarrow \Diamond \top$
 - (R4) $\perp \Leftrightarrow \Diamond \perp$
 - (R5) $\top \Leftrightarrow \circ \top$
 - (R6) $\perp \Leftrightarrow \circ \perp$

Liste allgemeingültiger Formeln

□ Dualitäts-Gesetze

- (R7) $\neg \circ A \Leftrightarrow \circ \neg A$
- (R8) $\neg \Box A \Leftrightarrow \Diamond \neg A$
- (R9) $\neg \Diamond A \Leftrightarrow \Box \neg A$

□ Reflexivitäts-Gesetze

- (R9) $\Box A \Rightarrow A$
- (R10) $A \Rightarrow \Diamond A$

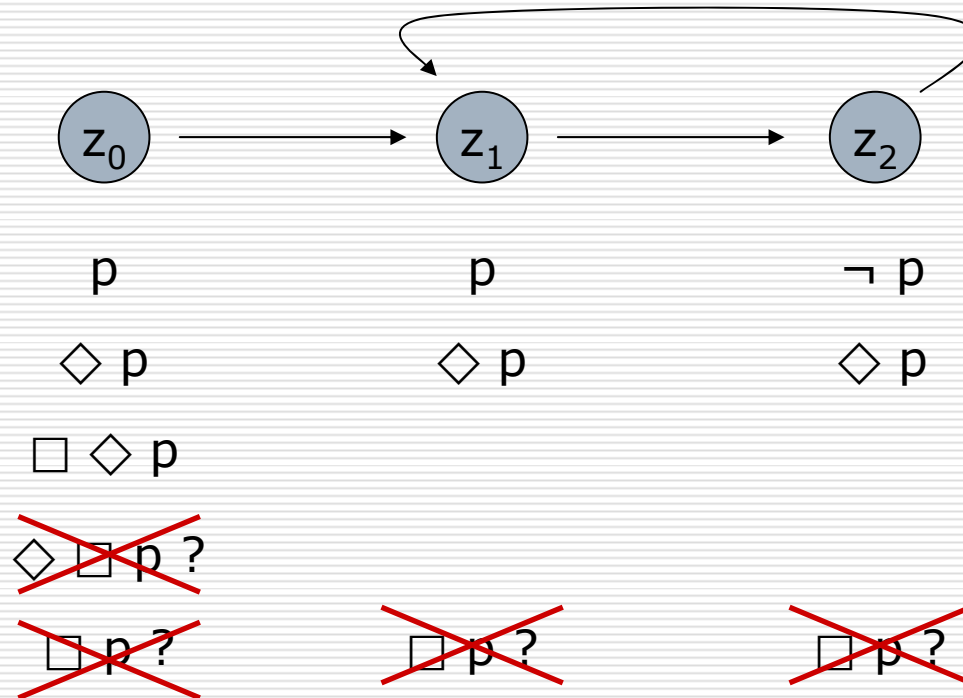
Liste allgemeingültiger Formeln

□ Gesetze über die „Stärke“ der Operatoren

- (R11) $\Box A \Rightarrow \circ A$
- (R12) $\circ A \Rightarrow \Diamond A$
- (R13) $\Box A \Rightarrow \Diamond A$
- (R14) $\Diamond \Box A \Rightarrow \Box \Diamond A$

- Gilt auch $\Box \Diamond A \Rightarrow \Diamond \Box A$?

Gilt auch $\Box \Diamond A \Rightarrow \Diamond \Box A$? *Nein !*



Liste allgemeingültiger Formeln

□ Idempotenz-Gesetze

■ (R15) $\Box \Box A \Leftrightarrow \Box A$

■ (R16) $\Diamond \Diamond A \Leftrightarrow \Diamond A$

□ Kommutativ-Gesetze

■ (R17) $\Box \circ A \Leftrightarrow \circ \Box A$

■ (R18) $\Diamond \circ A \Leftrightarrow \circ \Diamond A$

Liste allgemeingültiger Formeln

□ Distributiv-Gesetze

■ (R19) $\circ(A \wedge B) \Leftrightarrow \circ A \wedge \circ B$

■ (R20) $\circ(A \vee B) \Leftrightarrow \circ A \vee \circ B$

■ (R21) $\Box(A \wedge B) \Leftrightarrow \Box A \wedge \Box B$

■ (R22) $\Diamond(A \vee B) \Leftrightarrow \Diamond A \vee \Diamond B$

□ Schwache Distributiv-Gesetze

■ (R23) $\Box A \vee \Box B \Rightarrow \Box(A \vee B)$

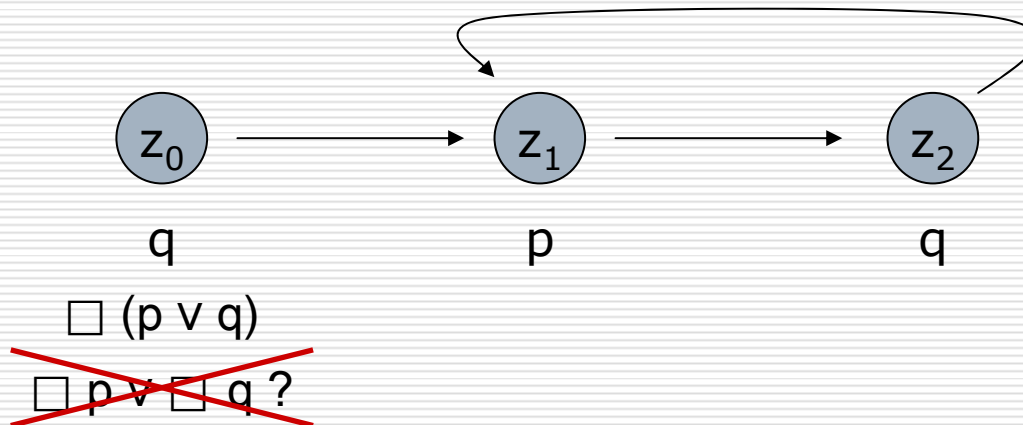
■ (R24) $\Diamond(A \wedge B) \Rightarrow \Diamond A \wedge \Diamond B$

Liste allgemeingültiger Formeln

- Warum gelten die Gegenrichtungen der schwachen Distributiv-Gesetze nicht ?

■ $\Box (A \vee B) \Rightarrow \Box A \vee \Box B$

■ $\Diamond A \wedge \Diamond B \Rightarrow \Diamond (A \wedge B)$

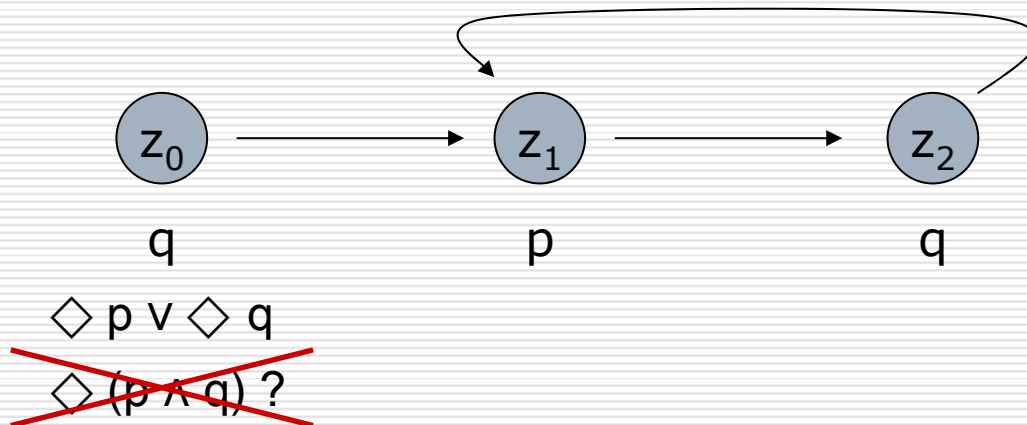


Liste allgemeingültiger Formeln

□ Warum gelten die Gegenrichtungen der schwachen Distributiv-Gesetze nicht ?

■ $\Box (A \vee B) \Rightarrow \Box A \vee \Box B$

■ $\Diamond A \wedge \Diamond B \Rightarrow \Diamond (A \wedge B)$



Liste allgemeingültiger Formeln

□ Fixpunkt-Charakterisierungen

■ (R25) $\Box A \Leftrightarrow A \wedge \circ \Box A$

■ (R26) $\Diamond A \Leftrightarrow A \wedge \circ \Diamond A$

□ Monotonie-Gesetze

■ (R27) $\Box (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\circ A \Rightarrow \circ B)$

■ (R28) $\Box (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Diamond A \Rightarrow \Diamond B)$

□ Rahmen-Gesetze

■ (R29) $\Box A \Rightarrow (\circ B \Rightarrow \circ(A \wedge B))$

■ (R30) $\Box A \Rightarrow (\Box B \Rightarrow \Box(A \wedge B))$

■ (R31) $\Box A \Rightarrow (\Diamond B \Rightarrow \Diamond(A \wedge B))$

Zusammenhang Allgemeingültigkeit und Folgerungseigenschaft

- Aus F folgt G , notiert $F \models G$, gdw. für jede Temporalinterpretation M gilt: wenn $M \models F$ dann $M \models G$ (jedes Modell von F ist auch Modell von G).
- Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache der temporalen Aussagenlogik. Seien F und G $\mathcal{L}$ -Formeln. Wenn $(F \Rightarrow G)$ allgemeingültig ist, dann $F \models G$.
- Im Fall der klassischen Prädikatenlogik erster Stufe gilt auch die Gegenrichtung. Für die temporalen Aussagenlogik gilt diese im allgemeinen nicht.

Zusammenhang Allgemeingültigkeit und Folgerungseigenschaft

Beweis: Vorausgesetzt sei, dass $(F \Rightarrow G)$ allgemeingültig ist, das heißt, für jede Temporalinterpretation M gelte $M \models (F \Rightarrow G)$.

Sei $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$ eine Temporalinterpretation mit $M \models F$. Nach Voraussetzung gilt auch $M \models (F \Rightarrow G)$.

Sei $w \in W$ beliebig, aber fest. Nach Definition gilt $M \models_w F$ und $M \models_w (F \Rightarrow G)$. Dann gilt auch $M \models_w G$. Da w beliebig ist, gilt für alle $w \in W$ die Beziehung $M \models_w G$, das heißt, $M \models G$.

Zusammenhang Allgemeingültigkeit und Folgerungseigenschaft

Widerlegung der Gegenrichtung:

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache mit dem Aussagensymbol p .

Sei $F = p$ und $G = \Box p$

Um zu zeigen, dass die Folgerungsbeziehung $p \models \Box p$ gilt, sei $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$ eine Temporalinterpretation mit $M \models p$.

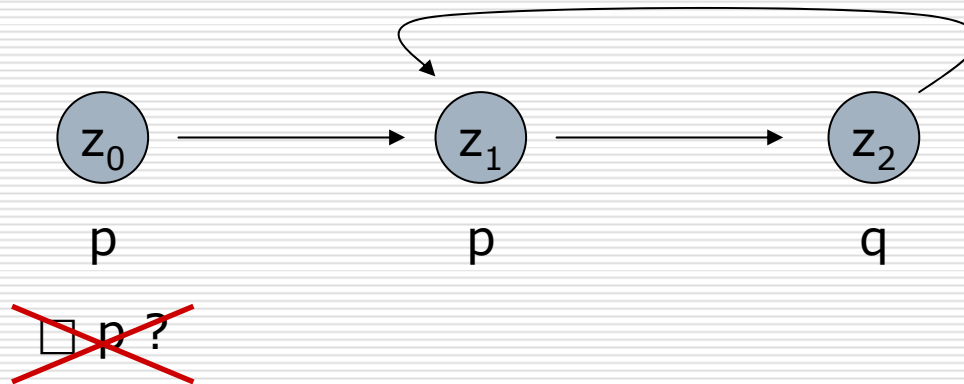
Sei $w_1 \in W$. Weil $M \models p$ gilt, gilt $M \models_w p$ für alle $w \in W$, unter anderem für alle $w_2 \in W$, so dass $(w_1, w_2) \in E$.

Also gilt $M \models_{w_1} \Box p$. Da w_1 beliebig ist, gilt $M \models \Box p$.
Damit gilt die Folgerungsbeziehung $p \models \Box p$.

Zusammenhang Allgemeingültigkeit und Folgerungseigenschaft

Es bleibt zu zeigen, dass $(p \Rightarrow \Box p)$ nicht allgemeingültig ist.

Beispiel:



Charakterisierung von Rahmeneigenschaften

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache der Modallogik, deren Signatur mindestens ein Relationssymbol enthält. Sei (W, E) ein Rahmen.

- 1. E ist **reflexiv** gdw. für jede $\mathcal{L}$ -Modalinterpretation $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$ mit dem gegebenen Rahmen und für jede $\mathcal{L}$ -Formel gilt $M \models (\Box F \Rightarrow F)$
- 2. E ist **transitiv** gdw. für ... gilt $M \models (\Box F \Rightarrow \Box \Box F)$
- 3. E ist **symmetrisch** gdw. für ... gilt $M \models (F \Rightarrow \Box \Diamond F)$
- 4. E ist **links total** gdw. für ... gilt $M \models (\Box F \Rightarrow \Diamond F)$
- 5. E ist **rechtseindeutig** gdw. für ... gilt $M \models (\Diamond F \Rightarrow \Box F)$

Beweis zu 1. (Reflexivität) (1)

Richtung „ $\rightarrow$ “

Voraussetzung: E ist reflexiv

Sei $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$ eine $\mathcal{L}$ -Modalinterpretation mit gegebenem Rahmen und sei F eine $\mathcal{L}$ -Formel.

Annahme: $M \not\models (\Box F \Rightarrow F)$.

Dann gibt es eine Welt $w \in W$ mit $M \not\models_w (\Box F \Rightarrow F)$, das heißt $M \models_w \Box F$ und $M \not\models_w F$. Wegen der Reflexivität von E ist $(w, w) \in E$, und wegen $M \models_w \Box F$ gilt $M \models_w F$. Widerspruch

Beweis zu 1. (Reflexivität) (2)

Richtung „ $\leftarrow$ “

Voraussetzung: für jede $\mathcal{L}$ -Modalinterpretation $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$ mit dem gegebenem Rahmen und für jede $\mathcal{L}$ -Formel F gilt:

$M \models (\Box F \Rightarrow F)$

Annahme: E ist nicht reflexiv, das heißt, es gibt eine Welt $w_0 \in W$ mit $(w_0, w_0) \notin E$.

Sei F eine atomare $\mathcal{L}$ -Formel. Sie ist also erfüllbar und falsifizierbar.

Sei $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$ eine $\mathcal{L}$ -Modalinterpretation mit $M \not\models_{w_0} F$ und $M \models_w F$ für alle $w \in W \setminus \{w_0\}$. Dann gilt insbesondere $M \models_w F$ für alle w mit $(w_0, w) \in E$. Das bedeutet, $M \models_{w_0} \Box F$.

Wegen $M \not\models_{w_0} F$ gilt dann $M \not\models_{w_0} (\Box F \Rightarrow F)$, also $M \not\models (\Box F \Rightarrow F)$.

Widerspruch.

Beweis zu 2. (Transitivität) (1)

Richtung „ $\rightarrow$ “

Voraussetzung: E ist transitiv

Sei $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$ eine $\mathcal{L}$ -Modalinterpretation mit gegebenem Rahmen und sei F eine $\mathcal{L}$ -Formel.

Annahme: $M \not\models (\Box F \Rightarrow \Box\Box F)$.

Dann gibt es eine Welt $w_1 \in W$ mit $M \not\models_{w_1} (\Box F \Rightarrow \Box\Box F)$, das heißt $M \models_{w_1} \Box F$ und $M \not\models_{w_1} \Box\Box F$. Also gibt es Welten $w_2, w_3 \in W$ mit $(w_1, w_2) \in E$ und $(w_2, w_3) \in E$ und $M \not\models_{w_3} F$. Wegen der Transitivität von E ist $(w_1, w_3) \in E$, und wegen $M \models_{w_1} \Box F$ gilt $M \models_{w_3} F$.

Widerspruch.

Beweis zu 2. (Transitivität) (2)

Richtung „ $\leftarrow$ “

Voraussetzung: für jede $\mathcal{L}$ -Modalinterpretation $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$ mit dem gegebenem Rahmen und für jede $\mathcal{L}$ -Formel F gilt:

$M \models (\Box F \Rightarrow \Box \Box F)$

Annahme: E ist nicht transitiv, das heißt, es gibt Welten $w_1, w_2, w_3 \in W$ mit $(w_1, w_2) \in E$ und $(w_2, w_3) \in E$ und $(w_1, w_3) \notin E$

Sei F eine atomare $\mathcal{L}$ -Formel. Sie ist also erfüllbar und falsifizierbar.

Sei $M = (W, E, \{M_w\}_{w \in W})$ eine $\mathcal{L}$ -Modalinterpretation mit $M \not\models_{w_3} F$ und $M \models_w F$ für alle $w \in W \setminus \{w_3\}$. Dann gilt insbesondere $M \models_w F$ für alle w mit $(w_1, w) \in E$. Das bedeutet, $M \models_{w_1} \Box F$.

Wegen $(w_2, w_3) \in E$ und $M \not\models_{w_3} F$ gilt $M_{w_2} \not\models \Box F$ und wegen $(w_1, w_2) \in E$ auch $M_{w_1} \not\models \Box \Box F$. Damit gilt $M_{w_1} \not\models (\Box F \Rightarrow \Box \Box F)$, also $M \not\models (\Box F \Rightarrow \Box \Box F)$. Widerspruch.

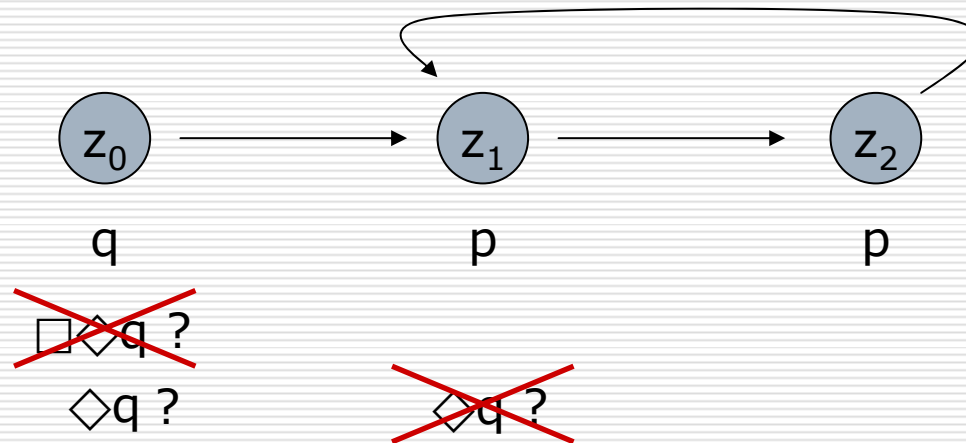
Rahmeneigenschaften

- Für die lineare temporale Aussagenlogik sollten also folgende Rahmeneigenschaften allgemeingültig sein:
 - Reflexivität ($\Box F \Rightarrow F$)
 - Transitivität ($\Box F \Rightarrow \Box \Box F$)
 - Links Totalität ($\Box F \Rightarrow \Diamond F$)

- Reflexivität gilt unmittelbar aus R9
- Transitiv: ($\Box F \Rightarrow \Box \Box F$) nach R15 gdw. ($\Box F \Rightarrow \Box F$) gdw. $\top$
- Links Totalität gilt unmittelbar aus R13

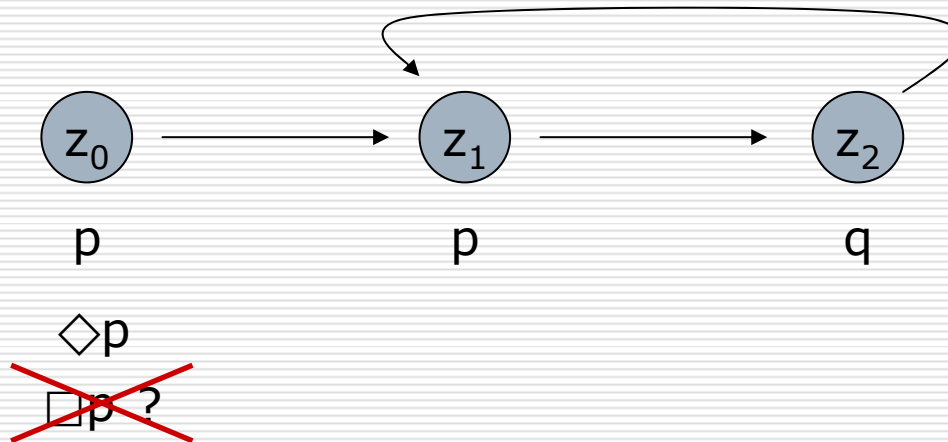
Rahmeneigenschaften

- Nicht hingegen:
 - Symmetrie ($F \Rightarrow \Box \Diamond F$)
 - Rechtseindeutigkeit ($\Diamond F \Rightarrow \Box F$)



Rahmeneigenschaften

- Nicht hingegen:
 - Symmetrie ($F \Rightarrow \Box \Diamond F$)
 - Rechtseindeutigkeit ($\Diamond F \Rightarrow \Box F$)



Spracherweiterungen

- Bisher können wir Aussagen über das „Jetzt“ und über nachfolgende Zustände machen
- Es fehlen:
 - Aussagen über die Vergangenheit
 - „sequenzielle / bedingte“ Aussagen (bis dahin, im ersten Zustand nach ...)
 - Aussagen über den Anfangszustand

Past-Operatoren

□ Aussagen über die Vergangenheit

- $\ominus A$: „A trifft in vorhergehenden Zuständen zu“
(previous-Operator)
- $\boxminus A$: „A trifft jetzt und in allen vorhergehenden Zuständen zu“
(has-always-been-Operator)
- $\Diamond A$: „A trifft jetzt oder in einem vorhergehenden Zustand zu“
(once-Operator)

until / unless / atnext / before

- A **until** B: „Es gibt einen nachfolgenden Zustand, in dem B zutrifft, und A trifft in allen Zuständen bis dahin zu“
- A **unless** B: „Falls es einen nachfolgenden Zustand gibt, in dem B zutrifft, so trifft A in allen Zuständen bis dahin zu (andernfalls trifft A in allen nachfolgenden Zuständen zu)“
- A **atnext** B: „A trifft im ersten nachfolgenden Zustand zu, in dem B zutrifft (falls dieser Zustand existiert)“
- A **before** B: „Falls es einen nachfolgenden Zustand gibt, in dem B zutrifft, so trifft A in einem Zustand davor zu“

Anfangszustand

- Einführung einer Variablen **init**, die genau im Anfangszustand gilt.
- **init** $\Rightarrow$ A: „A trifft im Anfangszustand zu“
- Mit Hilfe der Past-Operatoren auch ausdrückbar als:
 $\ominus \text{ false} \Rightarrow A$



Vielen Dank
für die Aufmerksamkeit!