Einführung Modallogik

Paul Harrenstein

Ludwig-Maximilians-Universität, München

23. Februar 2008

Was ist und soll Logik?

- Herkömmlich: Die Untersuchung von gültigen und ungültigen Argumenten
- Die mathematische Untersuchung von formalen Sprachen und ihren Ausdruckskraft
- Formale Syntax und Semantik
- Syntaktische Ableitungen ($\Gamma \vdash \varphi$) vs. semantische Folgerung ($\Gamma \models \varphi$)
- Die Bedeutung von Vollständigkeit, Entscheidbarkeit und Komplexität
- Austauschbeziehung zwischen Ausdruckskraft und erstrebenswerten Eigenschaften

Aussagenlogik

Syntax Φ eine Menge von Aussagevariablen mit typischem Element p.

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2$$

Semantik Model $V\colon \Phi \to \{\mathtt{true}, \mathtt{false}\}$.

$$\begin{array}{lcl} V \Vdash p & \Leftrightarrow & V(p) = \mathtt{true} \\ V \Vdash \neg\varphi & \Leftrightarrow & V \nVdash \varphi \\ V \Vdash \varphi \wedge \psi & \Leftrightarrow & V \Vdash \varphi \text{ und } V \Vdash \psi \end{array}$$

$$\Gamma \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{für alle Modelle } V\text{, wenn } V \Vdash \Gamma\text{, dann } V \Vdash \varphi$$

Eigenschaften

- Nicht sehr ausdrucksstark
- Wichtige Probleme entscheidbar, z.B., zu entscheiden ob ein Formel eine Tautologie ist
- Endlich axiomatisierbar (Vollständigkeit)

Logik der ersten Stufe

Syntax $x \in Var$, $a \in Cons$, $f \in Func$, $R \in Rel$

$$t \;::=\; x \mid a \mid f(t_1, \ldots, t_n)$$

$$\varphi \;::=\; R(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \exists x \varphi$$

Semantik Modelle: $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{I})$, sodass $\mathcal{I}(a) \in A$, $\mathcal{I}(f) \in A^{A \times \cdots \times A}$, $\mathcal{I}(R) \subseteq A \times \cdots \times A$

Belegungen: $g \colon Var \to A$

Interpretation:

$$\begin{aligned} [\![x]\!]_{\mathfrak{A},g} &= g(x) \\ [\![a]\!]_{\mathfrak{A},g} &= \mathcal{I}(a) \\ [\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_{\mathfrak{A},g} &= \mathcal{I}(f)([\![t_1]\!]_{\mathfrak{A},g}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathfrak{A},g}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}, g \models R(t_1, \ldots, t_n) &\Leftrightarrow ([\![t_1]\!]_{\mathfrak{A},g}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathfrak{A},g}) \in \mathcal{I}(R) \\ \mathfrak{A}, g \models \neg\varphi &\Leftrightarrow \mathfrak{A}, g \not\models \varphi \\ \mathfrak{A}, g \models \varphi \wedge \psi &\Leftrightarrow \mathfrak{A}, g \models \varphi \text{ and } \mathfrak{A}, g \models \psi \\ \mathfrak{A}, g \models \exists x \varphi &\Leftrightarrow \text{for some } a \in A,\ \mathfrak{A}, g[x/a] \models \varphi \end{aligned}$$

Logik der ersten Stufe

Syntax $x \in Var,\ a \in Cons,\ f \in Func,\ R \in Rel$

$$t \ ::= \ x \mid a \mid f(t_1, \ldots, t_n)$$
$$\varphi \ ::= \ R(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \exists x \varphi$$

Semantik Modelle: $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{I})$, sodass
$\mathcal{I}(a) \in A, \quad \mathcal{I}(f) \in A^{A\times\cdots\times A}, \quad \mathcal{I}(R) \subseteq A \times \cdots \times A$

Belegungen: $g \colon Var \to A$

Interpretation:

$$\begin{aligned} [\![x]\!]_{\mathfrak{A},g} &= g(x) \\ [\![a]\!]_{\mathfrak{A},g} &= \mathcal{I}(a) \\ [\![f(t_1,\ldots,t_n)]\!]_{\mathfrak{A},g} &= \mathcal{I}(f)([\![t_1]\!]_{\mathfrak{A},g}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathfrak{A},g}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}, g \models R(t_1,\ldots,t_n) &\Leftrightarrow ([\![t_1]\!]_{\mathfrak{A},g}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathfrak{A},g}) \in \mathcal{I}(R) \\ \mathfrak{A}, g \models \neg\varphi &\Leftrightarrow \mathfrak{A}, g \not\models \varphi \\ \mathfrak{A}, g \models \varphi \wedge \psi &\Leftrightarrow \mathfrak{A}, g \models \varphi \text{ and } \mathfrak{A}, g \models \psi \\ \mathfrak{A}, g \models \exists x\varphi &\Leftrightarrow \text{for some } a \in A,\ \mathfrak{A}, g[x/a] \models \varphi \end{aligned}$$

Logik der ersten Stufe

Syntax $x \in \mathit{Var}$, $a \in \mathit{Cons}$, $f \in \mathit{Func}$, $R \in \mathit{Rel}$

$$t \ ::= \ x \mid a \mid f(t_1, \ldots, t_n)$$
$$\varphi \ ::= \ R(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \exists x \varphi$$

Eigenschaften:

- Viel ausdrucksstärker als die Aussagenlogik
- Interpretation auf relationalen Strukturen
- Endlich axiomatisierbar (Vollständigkeit)
- Unentscheidbar (es gibt keinen Algoritmus zu entscheiden ob ein Formel allgemeingültig ist)
- Manche Theorien sogar grundlegend unvollständig

Logik der zweiten Stufe

Syntax $x \in \mathit{Var}$, $X \in \mathit{VAR}$, $a \in \mathit{Cons}$, $f \in \mathit{Func}$, $R \in \mathit{Rel}$

$$t \ ::= \ x \mid a \mid f(t_1, \ldots, t_n)$$
$$\varphi \ ::= \ X(t_1, \ldots, t_n) \mid R(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \exists x\varphi \mid \exists X\varphi$$

Semantik Modelle: $\mathfrak{A} = (A, \mathcal{I})$

Belegungen: $g\colon \mathit{Var} \to A \quad h\colon \mathit{VAR} \to 2^{A\times\cdots\times A}$

Interpretation:

$$\mathfrak{A}, g, h \vDash \ X(t_1, \ldots, t_n) \ \Leftrightarrow \ ([\![t_1]\!]_{\mathfrak{A},g}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathfrak{A},g}) \in h(X)$$
$$\mathfrak{A}, g, h \vDash \ \exists X\varphi \ \Leftrightarrow \ \text{for some } B \subseteq A \times \cdots \times A,\ \mathfrak{A}, g, h[X/B] \vDash \varphi$$

Logik der zweiten Stufe

Syntax $x \in Var$, $X \in VAR$, $a \in Cons$, $f \in Func$, $R \in Rel$

$$t \ ::= \ x \mid a \mid f(t_1, \ldots, t_n)$$
$$\varphi \ ::= \ X(t_1, \ldots, t_n) \mid R(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \exists x \varphi \mid \exists X \varphi$$

Eigenschaften:

- Noch viel ausdrucksstärker als die Logik der ersten Stufe
- Unentscheidbar
- Grundlegend unvollständig

Was ist und soll Modallogik?

1. *Modallogische Sprachen sind einfache doch ausdrucksstarke Sprachen um über relationale Strukturen zu reden, und relationale Strukturen sind allgegenwärtig.*
2. *Modallogische Sprachen beschreiben relationale Strukturen aus einem natürlichen lokalen Sichtpunkt. Somit unterscheiden modallogische Sprachen sich von, zum Beispiel, der Logik der ersten Stufe. Modallogiken bilden allerdings keine isolierten Systeme.*
3. *Modallogische Sprachen haben viele verschiedenen Anwendungen in der Informatik, künstlichen Intelligenz, Philosophie und Mathematik.*

Was ist und soll Modallogik?

1. *Modallogische Sprachen sind einfache doch ausdrucksstarke Sprachen um über relationale Strukturen zu reden, und relationale Strukturen sind allgegenwärtig.*
2. *Modallogische Sprachen beschreiben relationale Strukturen aus einem natürlichen lokalen Sichtpunkt. Somit unterscheiden modallogische Sprachen sich von, zum Beispiel, der Logik der ersten Stufe. Modallogiken bilden allerdings keine isolierten Systeme.*
3. *Modallogische Sprachen haben viele verschiedenen Anwendungen in der Informatik, künstlichen Intelligenz, Philosophie und Mathematik.*

Was ist und soll Modallogik?

1. *Modallogische Sprachen sind einfache doch ausdrucksstarke Sprachen um über relationale Strukturen zu reden, und relationale Strukturen sind allgegenwärtig.*
2. *Modallogische Sprachen beschreiben relationale Strukturen aus einem natürlichen lokalen Sichtpunkt. Somit unterscheiden modallogische Sprachen sich von, zum Beispiel, der Logik der ersten Stufe. Modallogiken bilden allerdings keine isolierten Systeme.*
3. *Modallogische Sprachen haben viele verschiedenen Anwendungen in der Informatik, künstlichen Intelligenz, Philosophie und Mathematik.*

Was ist und soll Modallogik?

1. *Modallogische Sprachen sind einfache doch ausdrucksstarke Sprachen um über relationale Strukturen zu reden, und relationale Strukturen sind allgegenwärtig.*
2. *Modallogische Sprachen beschreiben relationale Strukturen aus einem natürlichen lokalen Sichtpunkt. Somit unterscheiden modallogische Sprachen sich von, zum Beispiel, der Logik der ersten Stufe. Modallogiken bilden allerdings keine isolierten Systeme.*
3. *Modallogische Sprachen haben viele verschiedenen Anwendungen in der Informatik, künstlichen Intelligenz, Philosophie und Mathematik.*

Relationale Strukturen (allgemein)

Definition: Eine *relationale Struktur* ist ein Tupel $F = (W, R_1, \ldots, R_i, \ldots)$, sodass:

- W eine Menge von Punkten, Zuständen, Knoten, möglichen Welten, oder Zeitpunkten usw.
- $R_i \subseteq W \times W$

Möglich interessante Eigenschaften von relationalen Strukturen:

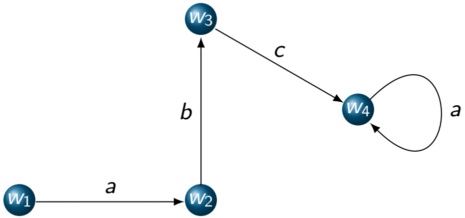
- Transitivität, Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie, usw.
- Loops, Vergabelungen, Schleifen, usw.
- ...

Beschriftete Transitionssysteme

Definition: Ein *beschriftetes Transitionssystem* ist ein Tupel F $(W, \{R_a \colon a \in A\})$ wo:

- W eine Menge von Zuständen
- A eine Menge von Labels
- R_a eine Transitionsrelation für das Label a

Beispiel:

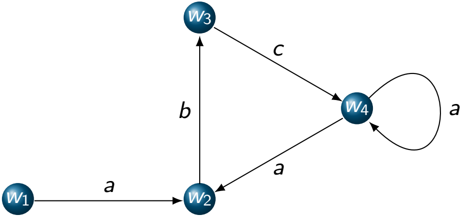


Beschriftete Transitionssysteme

Definition: Ein *beschriftetes Transitionssystem* ist ein Tupel $F\ (W, \{R_a\colon a \in A\})$ wo:

- W eine Menge von Zuständen
- A eine Menge von Labels
- R_a eine Transitionsrelation für das Label a

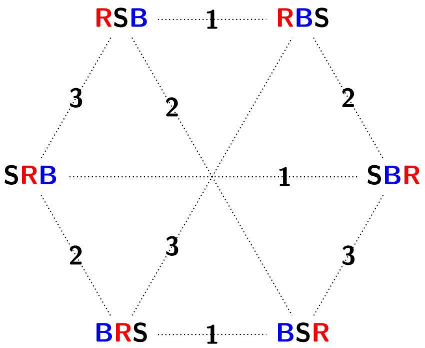
Beispiel:



Temporale Strukturen

- Menge von Zeitpunkten mit einer temporalen Ordnung
- Zukunft und Vergangenheit
- Lineare Zeit
- Verzweigende Zukunft
- Zurückverzweigende Vergangenheit
- Diskrete, dichte und kontinuierliche Zeit

Epistemische Strukturen



Syntax der elementaren modallogischen Sprache

Syntax: Aussagevariablen: $p \in \Phi$
Formeln: $\varphi \in L(\Phi)$

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \Box\varphi$$

Abkürzungen:

$$\begin{array}{rcl} \bot & \equiv & p \wedge \neg p \\ \varphi \vee \psi & \equiv & \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ \varphi \rightarrow \psi & \equiv & \neg\varphi \vee \psi \\ \Diamond\varphi & \equiv & \neg\Box\neg\varphi \end{array}$$

Drei Lesarten der elementaren modallogischen Sprache:

Alethische Modallogik: $\Box\varphi$ heißt "φ ist notwendig."
Epistemische Modallogik: $\Box\varphi$ heißt "der Agent weiß/glaubt, dass φ."
Beweisbarkeitslogik: $\Box\varphi$ heißt "φ ist beweisbar (in einer arithmetischen Theorie)."

Alethische Modallogik

$\Box\varphi$ heißt "φ ist notwendig."
$\Diamond\varphi$ hießt "φ ist möglich."

Inuition: "φ ist notwendig falls φ wahr ist in allen möglichen Welten."

Streitfragen: Welche der folgenden Formeln sollten gelten?

- $\Box\varphi \rightarrow \varphi$
- $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
- $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
- $\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$
- $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$
- $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

Epistemische Logik

$\Box\varphi$ heißt "der Agent weiß, dass φ."

Streitfragen: Welche der folgenden Formeln sollten gelten?

- $\Box\varphi \rightarrow \varphi$
- $\varphi \rightarrow \Box\varphi$
- $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
- $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

Epistemische Logik

$K\varphi$ heißt "der Agent weiß, dass φ."

Streitfragen: Welche der folgenden Formeln sollten gelten?

- $K\varphi \to \varphi$
- $\varphi \to K\varphi$
- $K\varphi \to KK\varphi$
- $K(\varphi \to \psi) \to (K\varphi \to K\psi)$

Epistemische Logik

$B\varphi$ heißt "der Agent glaubt, dass φ."

Streitfragen: Welche der folgenden Formeln sollten gelten?

- $B\varphi \rightarrow \varphi$
- $\varphi \rightarrow B\varphi$
- $B\varphi \rightarrow BB\varphi$
- $B(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (B\varphi \rightarrow B\psi)$

Beweisbarkeitslogik

$\Box\varphi$ heißt "φ ist beweisbar (in einer arithmetischen Theorie)."

Streitfragen: Welche der folgenden Formeln sollten gelten?

- $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$
- $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

Semantik der elementaren Modallogik

Definition: Ein *Rahmen (frame)* F für $L(\Phi)$ ist ein Paar (W, R) wo:

- W eine nicht-leere Menge ist
- $R \subseteq W \times W$ eine binäre Relation auf W ist

Definition: Ein *Modell* M für $L(\Phi)$ ist ein Tupel (W, R, V) wo:

- (W, R) ein Rahmen ist
- $V \colon W \times \Phi \to \{\mathtt{true}, \mathtt{false}\}$

Definition Sei $M = (W, R, V)$ und $w \in W$.

$$
\begin{array}{lcl}
M, w \Vdash p & \Leftrightarrow & V(w, p) = \mathtt{true} \\
M, w \Vdash \neg\varphi & \Leftrightarrow & M, w \nVdash \varphi \\
M, w \Vdash \varphi \wedge \psi & \Leftrightarrow & M, w \Vdash \varphi \text{ und } M, w \Vdash \psi \\
M, w \Vdash \Box\varphi & \Leftrightarrow & \text{für alle } v \in W \text{ mit } wRv\text{:}\ \ M, v \Vdash \varphi \\
M, w \Vdash \Diamond\varphi & \Leftrightarrow & \text{es gibt } v \in W \text{ mit } wRv\text{, sodass } M, v \Vdash \varphi
\end{array}
$$

Semantik der elementaren Modallogik

Definition: Ein *Rahmen (frame)* F für $L(\Phi)$ ist ein Paar (W, R) wo:

- W eine nicht-leere Menge ist
- $R \subseteq W \times W$ eine binäre Relation auf W ist

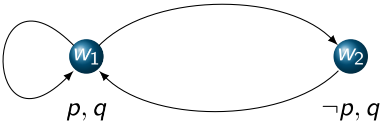
Definition: Ein *Modell* M für $L(\Phi)$ ist ein Tupel (W, R, V) wo:

- (W, R) ein Rahmen ist
- $V\colon W \times \Phi \rightarrow \{\texttt{true}, \texttt{false}\}$

Definition Sei $M = (W, R, V)$ und $w \in W$.

$$
\begin{array}{lcl}
M, w \Vdash p & \Leftrightarrow & V(w, p) = \texttt{true} \\
M, w \Vdash \neg\varphi & \Leftrightarrow & M, w \nVdash \varphi \\
M, w \Vdash \varphi \wedge \psi & \Leftrightarrow & M, w \Vdash \varphi \text{ und } M, w \Vdash \psi \\
M, w \Vdash \Box\varphi & \Leftrightarrow & \text{für alle } v \in W \text{ mit } wRv\text{:} \;\; M, v \Vdash \varphi \\
M, w \Vdash \Diamond\varphi & \Leftrightarrow & \text{es gibt } v \in W \text{ mit } wRv\text{, sodass } M, v \Vdash \varphi
\end{array}
$$

Beispiel



Welche der folgende Aussagen stimmen?

1. $M, w_1 \Vdash \Box\Diamond p$
2. $M, w_2 \Vdash \Diamond\Box\neg q$
3. $M, w_1 \Vdash p \rightarrow \Box p$
4. $M, w_1 \Vdash p \rightarrow \Box\Diamond p$

Semantische Gültigkeit und Folgerung

Definition: Sei $F = (W, R)$, $M = (F, V)$ und $\varphi \in L(\Phi)$.

$$\begin{array}{rcl} M \Vdash \varphi & \Leftrightarrow & \text{für alle } w \in W,\ \ M, w \Vdash \varphi \\ F, w \Vdash \varphi & \Leftrightarrow & \text{für alle } V \in \{\mathtt{true}, \mathtt{false}\}^{W \times \Phi},\ \ (F, V), w \Vdash \varphi \\ F \Vdash \varphi & \Leftrightarrow & \text{für alle } w \in W,\ \ F, w \Vdash \varphi \end{array}$$

Definition: Sei $\mathscr{C}$ eine Klasse von Rahmen, dann

$$\vDash_{\mathscr{C}} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{für alle } F \in \mathscr{C},\ \ F \Vdash \varphi$$

(Wir schreiben $\vDash \varphi$ für $\vDash_{\mathscr{C}} \varphi$ wenn $\mathscr{C}$ die Klasse von allen Rahmen ist.)

Charakterisierung von Rahmeneigenschaften

Definition: Eine Formel $\varphi \in L(\Phi)$ *charakterisiert* eine Klasse $\mathscr{C}$ von Rahmen, wenn

$$F \Vdash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad F \in \mathscr{C}$$

Proposition: Sei $p \in \Phi$, dann

1. $\Box p \rightarrow p$ charakterisiert die Klasse von reflexiven Rahmen
2. $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ charakterisiert die Klasse von transitiven Rahmen
3. $\Diamond\Box p \rightarrow p$ charakteriert die Klasse von symmetrischen Rahmen
4. $\Diamond\Box p \rightarrow \Box p$ charakterisiert die Klasse von euklidischen Rahmen

Modale Hilbert Systeme

Definition: Ein **K**-Beweis ist eine Folge von Formeln, von den jeder entweder ein *Axiom* ist oder folgt aus Formeln die schon bisher mittels einer *Beweisregel* abgeleitet worden war. $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ heißt, dass φ auf diese Weise abgeleitet werden kann.

- *Axiomen von* **K**
  - Alle aussagenlogischen Tautologien
  - $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (das **K**-Axiom)
- *Regeln von* **K**
  - wenn $\vdash \varphi \to \psi$ und $\vdash \psi$, dann $\vdash \psi$ (*MP*)
  - wenn $\vdash \varphi$, dann $\vdash \Box\varphi$ (*Gen.*)
  - wenn $\vdash \varphi$, dann $\vdash \varphi'$, wo φ' mittels einer *uniformen Substitution* aus φ erzeugt worden ist

Beispiel

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$	Tautologie
2.	$\Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)))$	Generalisation, 1
3.	$\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	**K**-Axiom
4.	$\Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q)))$	uniforme Substitution, 3
5.	$\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q))$	Modus Ponens, 2,4
6.	$\Box(q \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$	uniforme Substitution, 3
7.	$\Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$	*Aussagenlogik*, 5, 6
8.	$(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$	*Aussagenlogik*, 7

Vollständigkeit von normalen Modallogiken

Theorem: $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ genau dann wenn $\models \varphi$.

Definition: Eine *normale Modallogik* ist eine Menge von Formeln, die alle aussagenlogische Tautologien und alle Instanzen von $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ enthält und abgeschlossen ist unter *Modus Ponens*, *Generalisierung* und *uniformen Substitution*.

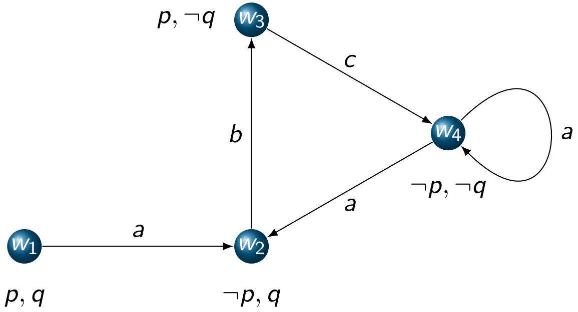
Fact: **K** ist die *kleinste* normale Modallogik.

Dynamische Logik

$$\varphi ::= \ p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid [\pi]\varphi \mid \langle\pi\rangle\varphi$$
$$\pi ::= \ a \mid \pi_1 ; \pi_2 \mid \pi_1 \cup \pi_2 \mid \pi^* \mid \varphi?$$

$[\pi]\varphi$: Nach π gilt φ
$\pi_1; \pi_2$: Führe zuerst π aus und als nächstes π'
$\pi_1 \cup \pi_2$: Führe entweder π_1 oder π_2 aus
π^* : Führe π null oder mehrmals aus
$\varphi?$: Überprüfe ob φ gilt

Dynamische Logik: Beispiel



Gilt die folgende Aussage?

- $M, w_2 \Vdash \langle b; c\rangle[a^*]q$

Epistemische Logik

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid K_i\varphi \mid B_i\varphi \mid D\varphi \mid E\varphi \mid C\varphi$$

$K_i\varphi$: Agent *i* weiß, dass φ
$B_i\varphi$: Agent *i* glaubt, dass φ
$D\varphi$: Erkenntnis von φ ist distribuiert
$E\varphi$: Jeder weiß, dass φ
$C\varphi$: Es ist *common knowledge*, dass φ

Temporale Logik

$$\varphi ::= \ p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \Box\varphi \mid \bigcirc\varphi \mid \varphi_1 U \varphi_2$$

$\Box\varphi$: Von jetzt an φ
$\bigcirc\varphi$: Als nächstes φ
$\varphi U \psi$: φ bis ψ

Fazit

- Modallogische Sprachen sind einfache doch ausdruckstarke Sprachen um über relationale Strukturen zu reden.
- Verschiedene Modallogiken für verschieden Anwendungen: alethische Modallogik, Epistemische Logik, temporale Logik, dynamische Logik.
- Modale Formeln können Rahmeneigenschaften charakterisieren.
- Normale Modallogiken.