Korrespondenztheorie

Hauptseminar Modallogik

Martin Lange

Institut für Informatik, LMU München

May 14, 2008

Korrespondenztheorie

- untersucht die Ausdrucksstärke von Modallogik
  - Was kann man ausdrücken?
  - Was kann man nicht ausdrücken?
- Ausdrucksstärke über
  - Frames
  - Modellen

Korrespondenztheorie

- untersucht die Ausdrucksstärke von Modallogik
  - Was kann man ausdrücken?
  - Was kann man nicht ausdrücken?
- Ausdrucksstärke über
  - Frames
  - Modellen

Beispiel: Logik des geteilten Wissens

Frage Ist $\mathrm{C}\varphi$ ausdrückbar mittels der Operatoren K_i, $i \in I$?

Beispiel: Logik des geteilten Wissens

Frage Ist $\mathrm{C}\varphi$ ausdrückbar mittels der Operatoren K_i, $i \in I$?

Antwort 1 Wenn $|I| = 1$, dann ja: $\mathrm{C}\varphi \equiv \mathrm{K}\varphi$

intuitiv klar, **Beweis**

- $\models \mathrm{C}\varphi \rightarrow \mathrm{K}\varphi$ gilt aufgrund der Definition
- wenn $|I| = 1$, dann $\mathrm{C}\varphi \equiv \bigwedge_{j \geq 1} \mathrm{K}^j\varphi$

  Transitivität der Rahmen impliziert $\models \mathrm{K}\varphi \rightarrow \mathrm{KK}\varphi$

  Induktion liefert $\models \mathrm{K}\varphi \rightarrow \mathrm{K}^j\varphi$ für alle $j \in \mathbb{N}$

  dann also auch $\models \mathrm{K}\varphi \rightarrow \mathrm{C}\varphi$

Was, wenn $|I| > 1$? Intuition sagt nein, aber wie beweisen?

Nicht-Ausdrückbarkeit einer Eigenschaft in Modallogik

typisches Beispiel für Standardbeweis

konstruiere zwei Modelle $\mathcal{K}$, $\mathcal{M}$, sodass

Lemma 1 für alle $n \in \mathbb{N}$:

a) $\mathcal{K}, w_n \models \mathrm{C}q$
b) $\mathcal{M}, w_n \not\models \mathrm{C}q$

Nicht-Ausdrückbarkeit einer Eigenschaft in Modallogik

typisches Beispiel für Standardbeweis

konstruiere zwei Modelle $\mathcal{K}$, $\mathcal{M}$, sodass

Lemma 1 für alle $n \in \mathbb{N}$:

a) $\mathcal{K}, w_n \models \mathrm{C}q$
b) $\mathcal{M}, w_n \not\models \mathrm{C}q$

Def.: modale Tiefe

$$
\begin{aligned}
md(q) &:= 0 \\
md(\varphi \vee \psi) &:= \max\{md(\varphi), md(\psi)\} \\
md(\neg\varphi) &:= md(\varphi) \\
md(\mathrm{K}_i)\varphi &:= 1 + md(\varphi)
\end{aligned}
$$

Nicht-Ausdrückbarkeit einer Eigenschaft in Modallogik

Lemma 2 für alle $n \in \mathbb{N}$, alle φ: falls $md(\varphi) = n$ dann

$$\mathcal{K}, w_{n+1} \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{M}, w_{n+1} \models \varphi$$

Nicht-Ausdrückbarkeit einer Eigenschaft in Modallogik

Lemma 2 für alle $n \in \mathbb{N}$, alle φ: falls $md(\varphi) = n$ dann

$$\mathcal{K}, w_{n+1} \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{M}, w_{n+1} \models \varphi$$

Satz Falls $|I| > 1$ dann ex. keine Formel φ nur über den Modaloperatoren K_i, sodass $\varphi \equiv \mathrm{C}q$

Beweis Angenommen, solch ein φ ex. Dann ist $md(\varphi) = m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Somit gilt

1. $\mathcal{K}, w_{m+1} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{M}, w_{m+1} \models \varphi$ laut Lemma 1
2. $\mathcal{K}, w_{m+1} \models \mathrm{C}q$ und $\mathcal{M}, w_{m+1} \not\models \mathrm{C}q$ laut Lemma 2

Widerspruch

Allgemeinere Resultate möglich

Beweis schön, aber nicht unbedingt wiederverwendbar

Bsp. Ist universelle Modalität $\mathrm{A}\varphi$ in Modallogik definierbar?

$$\mathcal{K}, w \models \mathrm{A}\varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{K}, v \models \varphi \text{ für alle } v \in \mathcal{S}$$

Konzept der modalen Tiefe hilft nicht viel

entweder anderes Maß auf Formeln nötig, oder aber anderer Ansatz

intuitive Antwort ist nein, aber wieso?

Zielsetzungen

Standardfrage bei neuer Logik: *Was kann man damit machen?*

absolute Antwort sehr einfach, aber nutzlos

relative Antworten viel sinnvoller: *Wozu korrespondiert Modallogik eigentlich in der uns bekannten Welt?*

$\rightsquigarrow$ Korrespondenztheorie

Übersicht

- Beweisbeispiel von Nicht-Ausdrückbarkeit:
  Logik des geteilten Wissens

- allgemeinere Charakterisierungen und Nicht-Ausdrückbarkeit
  - Disjunkte Vereinigungen
  - Bisimulationen
  - Übersetzung in FO

- wie gut sind diese Charakterisierungen?
  - Bisimilarität und modale Äquivalenz
  - Modallogik und FO

Disjunkte Vereinigungen

Def. Seien $\mathcal{K}_i = (\mathcal{S}_i, R_i, V_i)$ Kripke-Strukturen für $i = 1, 2$.

Die disjunkte Vereinigung ist
$\mathcal{K}_1 \uplus \mathcal{K}_2 := (\mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_2, R_1 \cup R_2, V_1 \cup V_2)$.

Disjunkte Vereinigungen

Def. Seien $\mathcal{K}_i = (\mathcal{S}_i, R_i, V_i)$ Kripke-Strukturen für $i = 1, 2$.

Die disjunkte Vereinigung ist
$\mathcal{K}_1 \uplus \mathcal{K}_2 := (\mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_2, R_1 \cup R_2, V_1 \cup V_2)$.

Lemma Seien $\mathcal{K}_i$ Kripke-Strukturen für $i = 1, 2$, $w \in \mathcal{S}_1$, φ Formel einer Modallogik. Dann gilt

$$\mathcal{K}_1, w \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{K}_1 \uplus \mathcal{K}_2, w \models \varphi$$

Beweis durch Induktion über den Formelaufbau

Noch ein Nicht-Ausdrückbarkeitsresultat

Satz Die universelle Modalität ist nicht in Modallogik ausdrückbar.

Beweis Konstruiere Modelle $\mathcal{K}$, $\mathcal{M}$, sodass

- $\mathcal{K}, w \models \mathrm{A}q$
- $\mathcal{K} \uplus \mathcal{M}, w \not\models \mathrm{A}q$

Widerspruch zur Invarianz der Modellklasse einer modallogischen Formel unter disjunkten Vereinigungen

Invarianzen

Def. $Mod(\varphi) := \{(\mathcal{K}, w) \mid \mathcal{K}, w \models \varphi\}$

natürliche Frage: unter welchen Operationen auf Modellen ist $Mod(\varphi)$ abgeschlossen für beliebiges modallogisches φ?

- disjunkte Vereinigungen mit beliebigen Kripke-Strukturen
- Bisimulationen

Bisimulationen

Def. Seien $\mathcal{K}_i = (\mathcal{S}_i, R_i, V_i)$, $i = 1, 2$ Kripke-Strukturen. Bisimulation ist Relation $\emptyset \neq B \subseteq \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$, sodass für alle $(w_1, w_2) \in B$ gilt:

- $V(w_1) = V(w_2)$,
- für alle v_1 mit $w_1 R v_1$ existiert v_2 mit $w_2 R v_2$ und $(v_1, v_2) \in R$,
- für alle v_2 mit $w_2 R v_2$ existiert v_1 mit $w_1 R v_1$ und $(v_1, v_2) \in R$.

$\mathcal{K}_1, w_1$ und $\mathcal{K}_2, w_2$ sind bisimilar, $\mathcal{K}_1, w_1 \sim \mathcal{K}_2, w_2$, gdw. es Bisimulation B gibt mit $(w_1, w_2) \in B$.

Beispiele . . .

Modellklassenabschluss unter Bisimulationen

Satz Sei φ modallogische Formel, $\mathcal{K}, w \sim \mathcal{M}, v$. Dann gilt

$$(\mathcal{K}, w) \in Mod(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad (\mathcal{M}, w) \in Mod(\varphi)$$

Beweis Sei B Bisimulation zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{M}$. Zeige durch Induktion über ψ, dass für alle ψ und alle $(s, t) \in B$ gilt:

$$\mathcal{K}, s \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{M}, t \models \psi$$

Modallogik kann nicht zählen

Satz Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es keine Formel φ^k, sodass

$$Mod(\varphi^k) \;=\; \{(\mathcal{K}, w) \;:\; |wR| = k\}$$

Beweis Diese Modellklassen sind nicht abgeschlossen unter Bisimulationen

genauso kann Modallogik nicht "rückwärtsschauen"

Bisimulationen im Speziellen

man erhält bisimilare Modelle z.B. durch

- Kopieren von Welten
- Baumabwicklungen
- Bisimulationsquotienten

Baumabwicklungen

Def. Sei $\mathcal{K} = (\mathcal{S}, R, V)$ Kripke-Struktur. $Paths(\mathcal{K})$ ist die kleinste Menge $X \subseteq \mathcal{S}^+$, sodass

- $\mathcal{S} \subseteq X$, und
- $w_0 \dots w_n \in \mathcal{X}$ und $w_n R v \in X \implies w_0 \dots w_n v \in X$

Def. Sei $\mathcal{K} = (\mathcal{S}, R, V)$ Kripke-Struktur. Ihre Baumabwicklung ist $\mathcal{T}(\mathcal{K}) = (Paths(\mathcal{K}), R', V')$ mit

$$(w_0 \dots w_n) R' (w_0 \dots w_n v) \quad \text{gdw.} \quad w_n R v$$

$$V'(w_0 \dots w_n) := V(w_n)$$

Bisimilarität von Baumabwicklungen

Satz Für alle $\mathcal{K} = (\mathcal{S}, R, V)$ und $w \in \mathcal{S}$ gilt

$$\mathcal{K}, w \;\sim\; \mathcal{T}(\mathcal{K}), w$$

Beweis Man rechne nach, dass $B = \{(v, w_0 \dots w_{n-1} v) \mid v \in \mathcal{S}\}$ eine Bisimulation ist.

Korollar Jede erfüllbare Formel der Modallogik hat ein Baummodell.

Bisimilarität ist Äquivalenzrelation

Satz Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis Seien B, B_1, B_2 Bisimulationen, dann sind dies auch

- $B_0 := \{(w, w) \mid w \in \mathcal{S}\}$ (für Reflexivität)
- $B^{-1} := \{(w, v) \mid (v, w) \in B\}$ (für Symmetrie)
- $B_1 \circ B_2 := \{(w, v) \mid \exists u.(w, u) \in B_1, (u, v) \in B_2\}$ (für Transitivität)

Bem.: $\sim$ ist selbst wiederum eine Bisimulation!

Bisimulationsquotienten

Def. Sei $\mathcal{K} = (\mathcal{S}, R, V)$ Kripke-Struktur. Ihr Bisimulationsquotient ist $\mathcal{K}/_\sim \; := \; (\mathcal{S}/_\sim, R/_\sim, V/_\sim)$ mit

- $\mathcal{S}/_\sim := \{[w] \mid w \in \mathcal{S}\}$, wobei $[w] := \{v \mid v \sim w\}$
- $[w]R/_\sim[v]$ gdw. wRv
- $V/_\sim([w]) := V(w)$

Bem.: $\mathcal{K}/_\sim$ ist wohldefiniert!

Bisimilarität von Bisimulationsquotienten

Satz Sei $\mathcal{K}$ Kripke-Struktur, w Welt. Dann gilt

$$\mathcal{K}, w \;\sim\; \mathcal{K}/_{\sim}, [w]$$

Beweis $\{(w, [w]) \mid w \in \mathcal{S}\}$ ist Bisimulation

Bisimilarität und modale Äquivalenz

Frage: Wie gut charakterisiert Bisimilarität eigentlich Modallogik?

Def. Modelle $\mathcal{K}, w$ und $\mathcal{M}, v$ sind modal äquivalent, $\mathcal{K}, w \equiv_{\mathrm{ML}} \mathcal{M}, v$ gdw. für alle ψ gilt:

$$\mathcal{K}, w \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{M}, v \models \psi$$

oben gezeigt: $\mathcal{K}, w \sim \mathcal{M}, v \;\Rightarrow\; \mathcal{K}, w \equiv_{\mathrm{ML}} \mathcal{M}, v$

Lemma $\mathcal{K}, w \sim \mathcal{M}, v \;\not\Leftarrow\; \mathcal{K}, w \equiv_{\mathrm{ML}} \mathcal{M}, v$

Bisimilarität und modale Äquivalenz

Frage: Wie gut charakterisiert Bisimilarität eigentlich Modallogik?

Def. Modelle $\mathcal{K}, w$ und $\mathcal{M}, v$ sind modal äquivalent, $\mathcal{K}, w \equiv_{\mathrm{ML}} \mathcal{M}, v$ gdw. für alle ψ gilt:

$$\mathcal{K}, w \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{M}, v \models \psi$$

oben gezeigt: $\mathcal{K}, w \sim \mathcal{M}, v \;\Rightarrow\; \mathcal{K}, w \equiv_{\mathrm{ML}} \mathcal{M}, v$

Lemma $\mathcal{K}, w \sim \mathcal{M}, v \;\not\Leftarrow\; \mathcal{K}, w \equiv_{\mathrm{ML}} \mathcal{M}, v$

Bem.: Umkehrung gilt aber z.B. für Kripke-Strukturen mit endlichem Ausgrad oder für infinitäre Modallogik auf beliebigen Strukturen

Nicht-Ausdrückbarkeit durch Einbettung

andere Möglichkeit, Nicht-Ausdrückbarkeit zu zeigen

Lemma Seien $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ Logiken, sodass $\mathcal{L}_1 \leq \mathcal{L}_2$, P Eigenschaft

$$P \text{ nicht definierbar in } \mathcal{L}_1 \quad \Longrightarrow \quad P \text{ nicht definierbar in } \mathcal{L}_2$$

Erstufige Prädikatenlogik

(Def.) FO = Prädikatenlogik mit Gleichheit und

- erststufigen Variablen $Var = \{x, y, \ldots\}$
- einstelligem Relationssymbol $q(x)$ für jede Proposition q
- zweistelligem Relationssymbol $R(x, y)$ für Erreichbarkeitsrelation

interpretiert über Kripke-Strukturen in natürlicher Weise

Einbettung in FO

Satz: $\mathrm{ML} \leq \mathrm{FO}$

Beweis Benutze Funktion $tr : Var \times \mathrm{ML} \to \mathrm{FO}$, sodass $tr_x(\varphi)$ genau x als freie Variable enthält und

$$\mathcal{K}, w \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{K}, w \models tr_x(\varphi)$$

$$\begin{aligned} tr_x(q) &:= q(x) \\ tr_x(\varphi \vee \psi) &:= tr_x(\varphi) \vee tr_x(\psi) \\ tr_x(\neg\varphi) &:= \neg tr_x(\varphi) \\ tr_x(\Box\varphi) &:= \forall y. R(x,y) \to tr_y(\varphi) \end{aligned}$$

Korollar ML ist sogar Fragment von GFO^2

Modallogik ist schwächer als FO

Satz $\mathrm{FO} \not\leq \mathrm{ML}$

Beweis FO kann

- zählen

$$\varphi^k \;\equiv\; \exists y_1.\ldots.\exists y_k.\big(\bigwedge_{i=1}^{k} R(x, y_i)\big) \wedge \big(\bigwedge_{i=1}^{k-1} \bigwedge_{j=i+1}^{k} y_i \neq y_j\big)$$
$$\wedge\big(\forall y.R(x,y) \rightarrow \bigvee_{i=1}^{k} y = y_i\big)$$

- die universelle Modalität ausdrücken

$$\mathrm{A}\varphi \;\equiv\; \forall x.tr_x(\varphi)$$

- ...

Der Satz von van Benthem

Def. Eine Klasse $\mathcal{C}$ von Modellen heisst bisimulations-invariant, falls gilt

$$(\mathcal{K}, w) \in \mathcal{C} \text{ und } (\mathcal{K}, w) \sim (\mathcal{M}, v) \quad \Longrightarrow \quad (\mathcal{M}, v) \in \mathcal{C}$$

Def. Sei

$$\mathrm{bis-inv-FO} \quad := \quad \{\varphi(x) \in \mathrm{FO} \mid \mathit{Mod}(\varphi(x)) \text{ ist bis.-inv.}\}$$

Satz (van Benthem) $\mathrm{ML} \equiv \mathrm{bis-inv-FO}$