

Themenverteilung Hauptseminar Modallogik (SS2008)

Paul Harrenstein und Martin Lange

Ludwig-Maximilians-Universität, München

12. Februar 2008

Was ist und soll die Modallogik?

- 1** *Modallogische Sprachen sind einfache doch ausdrucksstarke Sprachen um über relationale Strukturen zu reden, und relationale Strukturen sind allgegenwärtig.*
- 2** *Modallogische Sprachen beschreiben relationale Strukturen aus einem natürlichen lokalen Sichtpunkt. Somit unterscheiden modallogische Sprachen sich von, zum Beispiel, der Logik der ersten Stufe.*
- 3** *Modallogische Sprachen haben viele verschiedenen Anwendungen in der Informatik, künstlichen Intelligenz, Philosophie und Mathematik.*

Aussagenlogik

Syntax $\mathcal{P}$ eine Menge von Aussagevariablen mit typischem Element p .

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2$$

Semantik Model $V: \mathcal{P} \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$.

$$V \models p \quad \Leftrightarrow \quad V(p) = \text{true}$$

$$V \models \neg\varphi \quad \Leftrightarrow \quad V \not\models \varphi$$

$$V \models \varphi \wedge \psi \quad \Leftrightarrow \quad V \models \varphi \text{ und } V \models \psi$$

Syntax und Semantik von modallogischen Sprachen

Syntax

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi$$

Semantik Model $\mathfrak{M} = (S, R, V)$ wo $R \subseteq S \times S$ und $V: S \times \mathcal{P} \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, s \Vdash \Box\varphi &\Leftrightarrow \text{für alle } s \in S, \text{ wenn } sRs' \text{ dann } \mathfrak{M}, s' \Vdash \varphi \\ \mathfrak{M}, s \Vdash \Diamond\varphi &\Leftrightarrow \text{für manche } s \in S, sRs' \text{ und } \mathfrak{M}, s' \Vdash \varphi \end{aligned}$$

Beispiele:

Alethische Modallogik: $\Box\varphi$ heißt “ φ ist notwendig.”

Beweisbarkeitslogik: $\Box\varphi$ heißt “ φ ist beweisbar.”

Syntax und Semantik von modallogischen Sprachen

Syntax

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid [i]\varphi \mid \langle i \rangle\varphi$$

Semantik Model $\mathfrak{M} = (S, \{R_i\}_{i \in I}, V)$ wo $R \subseteq S \times S$ und $V: \mathcal{P} \rightarrow 2^S$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, s \models [i]\varphi &\Leftrightarrow \text{für alle } s \in S, \text{ wenn } sR_i s' \text{ dann } \mathfrak{M}, s' \models \varphi \\ \mathfrak{M}, s \models \langle i \rangle\varphi &\Leftrightarrow \text{es gibt } s \in S \text{ mit } sR_i s' \text{ und } \mathfrak{M}, s' \models \varphi \end{aligned}$$

Beispiele:

Epistemische Modallogik: $K_i\varphi$ heißt “Agent i weiß, dass φ .”

Dynamische Logik: $[\pi]\varphi$ heißt “nach Terminierung von Program π gilt φ ”

Themen: Theorie der Modallogik

- Korrespondenztheorie
 - Charakterisierung von Modellen und Rahmen
 - Standardübersetzung
 - Normale Modallogiken
 - Bisimulation
- Beweissysteme
 - Hilbertsche Beweissysteme für normalen Modallogiken
 - Vollständigkeit und Korrektheit
 - Kanonische Modelle
 - Alternative Beweissysteme: Tableaumethoden
- Entscheidbarkeit und Komplexität von Modallogiken

Themen: Anwendungen der Modallogik

- Epistemische Logik (philosophisch und künstliche Intelligenz)
- Temporale Logik (komputationell)
- Dynamische Logik (komputationell)
- Beschreibungslogiken (künstliche Intelligenz, Wissensdarstellung)
- Modale Fixpunktlogiken (komputationell)
- Intuitionistische Logik (mathematisch)
- Beweisbarkeitslogik (mathematisch)

Epistemische Logik

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid K_i\varphi \mid B_i\varphi \mid D\varphi \mid E\varphi \mid C\varphi$$

$K_i\varphi$: Agent i weiß, dass φ

$B_i\varphi$: Agent i glaubt, dass φ

$D\varphi$: Erkenntnis von φ ist distribuiert

$E\varphi$: Jeder weiß, dass φ

$C\varphi$: Es ist *common knowledge*, dass φ

Temporale Logik

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \Box\varphi \mid \bigcirc\varphi \mid \varphi_1 U \varphi_2$$

$\Box\varphi$: Von jetzt an φ

$\bigcirc\varphi$: Als nächstes φ

$\varphi U \psi$: φ bis ψ

Dynamische Logik

$$\begin{aligned}\varphi &::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid [\pi]\varphi \\ \pi &::= a \mid \pi_1; \pi_2 \mid \pi_1 \cup \pi_2 \mid \pi^* \mid \varphi?\end{aligned}$$

$[\pi]\varphi$: Nach π gilt φ

$\pi_1; \pi_2$: Führe zuerst π aus und als nächstes π'

$\pi_1 \cup \pi_2$: Führe entweder π_1 oder π_2 aus

π^* : Führe π null oder mehr Mal aus

$\varphi?$: Überprüfe ob φ gilt

Beschreibungslogiken

Beschreibungslogiken fürs Argumentieren über Ontologien.

Formale Ausarbeitung

- Zustände sind Instanzen von “Konzepten”
- Relation sind “Rollen”
- Interpretation von Formeln wiederum als Konzepte

Beispiel:

Konzept	Mörder für die Mafia
Beschreibungslogik	$\text{killer} \sqcap \exists \text{employer}.\text{killer}$
Modallogik	$\text{killer} \wedge \langle \text{employer} \rangle \text{gangster}$

Fixpunktlogiken

$$\varphi ::= p \mid X \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid [a]\varphi \mid \mu X.\varphi(X) \quad (X \text{ positiv in } \varphi)$$

Intuition: $\mu X.\varphi(X)$ äquivalent zu $\perp \vee \varphi(\perp) \vee \varphi(\varphi(\perp)) \vee \dots$

Normalerweise keine Rekursion in Modallogiken, mit Fixpunkten aber gegeben.

Beispiel: Erreichbarkeit in Graphen ohne Rekursion normalerweise nicht definierbar.

Intuitionistische Logik

- *Tertium non Datur* $\varphi \vee \neg\varphi$ und *reductio ad absurdum*
- Konstruktivistische Philosophie der Mathematik
- Dazugehörige Logik: *intuitionistische Logik*
- Intuitionistischer Logik kann eine modale Semantik gegeben werden

Beweisbarkeitslogik

- Frage: *Was können mathematische Theorien über sich selbst aussagen?*
- Gödels erster Unvollständigkeitssatz
- Peano Arithmetik (*PA*)
- $\ulcorner \varphi \urcorner$ bezeichnet die Gödelzahl von der Aussage φ
- $Prov(\ulcorner \varphi \urcorner)$ heißt, dass φ in *PA* beweisbar ist
- *Prov* kann analysiert werden als eine Modalität

Hauptseminar

Voraussetzungen

- Bestandenes Vordiplom
- Elementare Kenntnisse in Aussagenlogik
- Affinität mit mathematische Argumentation

Organisation

- Vortrag halten (ca. 60 Minuten), danach eine Ausarbeitung schreiben
- Ein bis drei Termine mit dem Betreuer
- Anwesenheit bei den anderen Vorträge

Lernziele

- Erkenntnis erwerben von der Modallogik
- Einen kurzen Vortrag vorbereiten und halten über ein komplexes Thema

Themenverteilung

- Korrespondenztheorie
- Beweissysteme für Modallogiken
- Entscheidbarkeit und Komplexität von Modallogiken
- Epistemische Logik
- Temporale Logik
- Dynamische Logik
- Beschreibungslogiken
- Modale Fixpunktlogiken
- Intuitionistische Logik
- Beweisbarkeitslogik