

Klausur zur Vorlesung Logik für Informatiker

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 min. Elektronische Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Schreiben Sie Ihren vollständigen Namen und Ihre Matrikelnummer deutlich lesbar auf dieses Deckblatt. Schreiben Sie auch Ihren Namen in die Kopfzeile auf **jedem Blatt** der Klausurangabe! Geben Sie alle benutzten Blätter ab. Lesen Sie die Aufgabenstellungen vollständig durch, bevor Sie mit der Bearbeitung der Aufgaben beginnen. Es gibt 6 unterschiedlich gewichtete Aufgaben zu insgesamt 46 Punkten. Mit 23 Punkten haben Sie sicherlich bestanden. Die Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden. Kontrollieren Sie, ob Sie alle Aufgabenblätter erhalten haben. Aufgabenstellungen befinden sich auf den Seiten 1–10. Kennzeichnen Sie auf den Rückseiten – falls Sie sie benutzen – klar, welche Aufgaben Sie bearbeiten. Streichen Sie alles das, was nicht korrigiert werden soll, durch. Verwenden Sie nur dokumentenechte Stifte und weder die Farben rot noch grün.

☐ Kreuzen Sie dieses Kästchen an, wenn Sie **nicht** wollen, dass das Ergebnis Ihrer Klausur mit Ihrer Matrikelnummer im Internet veröffentlicht wird.

☐ Kreuzen Sie dieses Kästchen an, wenn Ihre Klausur **nicht** bewertet werden soll.

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Hiermit erkläre ich die Richtigkeit der obigen Angaben.

(Unterschrift)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ	Note
Punkte	10	7	8	5	7	9	46	
erreicht								

Aufgabe 1 (Verschiedenes):**(10 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben enthalten jeweils eine Frage. Beantworten Sie diese mit “Ja” oder “Nein” und begründen Sie Ihre Antwort jeweils *kurz*, z.B. indem Sie ein Beispiel angeben oder auf Sätze aus der Vorlesung verweisen, etc.

- a) Gibt es eine Formel φ der Aussagenlogik, so dass sowohl φ als auch $\neg\varphi$ erfüllbar sind, aber $\varphi \vee \neg\varphi$ nicht erfüllbar ist?
- b) Gibt es Formeln $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$ der Aussagenlogik, so dass die folgenden vier Aussagen gelten?
- φ und φ' sind erfüllbarkeitsäquivalent.
 - ψ und ψ' sind erfüllbarkeitsäquivalent.
 - $\varphi \wedge \psi$ ist erfüllbar.
 - $\varphi' \wedge \psi'$ ist *nicht* erfüllbar.
- c) Kann es in einem Beweissystem wie z.B. dem Sequenzenkalkül eine Regel geben, die *herleitbar* und *nicht zulässig* ist?
- d) Angenommen, man hat zwei verschiedene Beweissysteme K_1 und K_2 für eine bestimmte Logik. K_1 ist *korrekt* und K_2 ist *vollständig*. Kann es eine Formel geben, die in K_1 beweisbar ist, aber nicht in K_2 ?
- e) Gibt es einen erfüllbaren FO-Satz φ , so dass $\text{Mod}(\{\varphi\})$ nur aus Strukturen besteht, die abzählbar unendlich groß sind (also dieselbe Kardinalität wie $\mathbb{N}$ haben)? (Beachten Sie auch die nächste Frage!)

f) Gibt es einen FO-Satz φ , so dass alle Strukturen in $Mod(\{\varphi\})$ höchstens abzählbar unendlich groß sind?

g) Gibt es zwei Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ (über der gleichen Signatur), so dass $\mathcal{A} \equiv_k \mathcal{B}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, aber nicht $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$?

h) Gibt es zwei Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ (über der gleichen Signatur), so dass $\mathcal{A} \not\equiv \mathcal{B}$ gilt, es aber für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen partiellen Isomorphismus κ_n von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt mit $|dom(\kappa_n)| = n$?

i) Gibt es eine aussagenlogische Formel, die im klassischen Sequenzenkalkül beweisbar ist, jedoch nicht im intuitionistischen Sequenzenkalkül?

j) Ist die aussagenlogische Formel

“die Erde ist eine Scheibe” $\rightarrow \neg$ “die Erde ist eine Kugel”

allgemeingültig?

Aufgabe 2 (Normalformen):**(2+2+3 Punkte)**

a) Geben Sie eine zu $\neg(A \vee (\neg B \wedge C))$ *äquivalente* aussagenlogische Formel in *disjunktiver Normalform* an.

b) Geben Sie eine zu $(B \rightarrow A) \wedge (\neg(\neg A \wedge B) \vee \neg(A \vee B))$ *erfüllbarkeitsäquivalente* aussagenlogische Formel in *konjunktiver Normalform* an.

c) Wandeln Sie die prädikatenlogische Formel

$$\left(\exists x. \forall y. \left((\exists z. R(z, y)) \rightarrow \exists z. f(x) \doteq z \right) \right) \wedge \exists x. P(f(x))$$

nach der in der Vorlesung vorgestellten Konstruktion in eine *erfüllbarkeitsäquivalente* Formel in *Skolem-Normalform* um. Geben Sie auch an, welche neuen Funktionssymbole jeweils mit welcher Stelligkeit Sie eingeführt haben.

Aufgabe 3 (Resolution, Unit-Propagation):**(4+4 Punkte)**

a) Zeigen Sie mithilfe der aussagenlogischen Resolution, dass

$$\{A, \neg A \vee B \vee C, \neg B \vee C, \neg C \vee E \vee \neg F, F \vee \neg G \vee H, \neg E \vee \neg F, G \vee H, G \vee \neg H, \neg G \vee \neg H \vee F\}$$

unerfüllbar ist.

b) Entscheiden Sie mithilfe von Unit-Propagation, ob

$$\{A, \neg A \vee B \vee C, \neg C \vee E \vee \neg F, F \vee \neg G \vee H, F \vee \neg H, F, \neg E \vee \neg F, \neg C \vee F \vee G, \neg B \vee F\}$$

erfüllbar ist oder nicht. Geben Sie dazu in einzelnen Schritten jeweils an, mit welchem Literal Sie Unit-Propagation machen und wie die dadurch entstehende Klauselmenge danach aussieht. Falls die Menge erfüllbar ist, so geben Sie am Ende auch eine erfüllende Variablenbelegung an.

Aufgabe 4 (Sequenzenkalkül für FO):**(5 Punkte)**

Sei R ein fest gewähltes, 2-stelliges Relationssymbol. Wir erweitern den Sequenzenkalkül für die Prädikatenlogik um die Regel

$$\frac{R(t_1, t_2), \Gamma \Longrightarrow \Delta \quad t_1 \doteq t_2, \Gamma \Longrightarrow \Delta \quad R(t_2, t_1), \Gamma \Longrightarrow \Delta}{\Gamma \Longrightarrow \Delta}$$

wobei t_1, t_2 beliebige Terme und Γ, Δ beliebige Formelmengen sind. Geben Sie einen Beweis für die Sequenz

$$\exists x. \left(\forall y. R(y, x) \rightarrow \psi(y) \right) \wedge \varphi(x) \wedge \psi(x) \Longrightarrow \forall x. \psi(x) \vee \exists y. R(y, x) \wedge \varphi(y)$$

an.

Hinweis: Sie können den Beweis natürlich auch im Querformat aufschreiben oder Äste an anderer Stelle fortsetzen.

Aufgabe 5 (Definierbarkeit):**(1+4+2 Punkte)**

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass die übliche Relation $<$ in der Struktur $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, 0, +)$ der reellen Zahlen *nicht* definierbar ist.

a) Finden Sie eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass einerseits $f(0) = 0$ und $f(x+y) = f(x)+f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, andererseits es jedoch $x, y \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x < y$ und $f(x) \not< f(y)$.

b) Sei ϑ eine Variablenbelegung. Wir definieren ihre Komposition mit der oben gefundenen Funktion f als Variablenbelegung $f \circ \vartheta$ mit $(f \circ \vartheta)(x) = f(\vartheta(x))$. Zeigen Sie durch Induktion über den Formelaufbau, dass für alle Formeln φ gilt:

$$\mathcal{R}, \vartheta \models \varphi \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{R}, f \circ \vartheta \models \varphi$$

Hinweise: (i) Sie können ohne Beweis annehmen, dass für alle Terme t und alle Variablenbelegungen ϑ gilt: $\llbracket t \rrbracket_{f \circ \vartheta}^{\mathcal{R}} = f(\llbracket t \rrbracket_{\vartheta}^{\mathcal{R}})$.

(ii) Beachten Sie, dass es in der Signatur keine Relationssymbole gibt. Sie müssen in der Induktion also lediglich atomare Formeln der Form $t_1 \doteq t_2$, sowie z.B. Disjunktionen, Negationen und existentielle Quantifikationen behandeln.

c) Zeigen Sie nun mithilfe von (a) und (b) in einem Widerspruchsbeweis, dass die Relation $<$ in $\mathcal{R}$ nicht definierbar ist.

Aufgabe 6 (Prädikatenlogik):**(1+1+1+1+3+2 Punkte)**

In dieser Aufgabe betrachten wir die Prädikatenlogik 1. Stufe über der Signatur $\tau = (\leq)$, wobei $\leq$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

a) Geben Sie einen Satz φ_{total} an, der besagt, dass die Relation $\leq$ eine totale Ordnung ist. *Hinweis:* R ist eine totale Ordnung gdw. R reflexiv und transitiv ist und die Eigenschaft hat, dass für je zwei Elemente x und y entweder x in Relation R zu y , oder y in Relation R zu x steht.

b) Geben Sie einen Satz φ_{max} an, der besagt, dass es ein maximales Element bzgl. $\leq$ gibt, also eines, welches zu keinem anderen Element in Relation steht.

c) Sei $n \geq 1$ beliebig. Geben Sie einen Satz φ_n an, der besagt, dass es mindestens $3n$ viele verschiedene Elemente gibt.

d) Für jedes $n \geq 1$ sei $\Phi_n := \{\varphi_{total}, \varphi_{max}, \varphi_n\}$. Geben Sie ein Modell für Φ_n an. *Hinweis:* Sie können dieses als gerichteten Graphen mit $\leq$ als Kantenrelation darstellen.

e) Sei $\Phi := \{\varphi_{total}, \varphi_{max}\} \cup \{\varphi_n \mid n \geq 1\}$. Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes und Teil (d), dass auch Φ erfüllbar ist.

f) Geben Sie ein Modell für die Formelmenge Φ aus Aufgabenteil (e) an. *Hinweis:* Wie bei Teil (d) können sie dieses grafisch darstellen.